

Chap. 16 : SUITES RÉCURRENTES

PTSi2

2002–2003

1 Étude générale

1.1 Définitions

Définition. Une **suite récurrente** est une suite définie par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction réelle.

Définition. Soit I un intervalle et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle stable par f** si et ssi $f(I) \subset I$.

1.2 Plan d'étude

1. La suite est-elle bien définie.
2. Étude des variations de f et du signe de $f(x) - x$.
3. Recherche d'un intervalle stable, c'est-à-dire I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$. On utilise en général les propriétés des fonctions continues sur un intervalle. Alors, par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
4. Si f est croissante sur I , on montre alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante, par récurrence en utilisant le signe de $f(x) - x$.
5. Si f est décroissante sur I , alors $f \circ f$ est croissante. On montre que les suites extraites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.
6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$) est croissante, on cherche à majorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. ...) en majorant f sur I .

7. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ ou $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$) est décroissante, on cherche à minorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. ...) en minorant f sur I .
8. Des deux points précédents, il suit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. ...) admet une limite.
9. Dans le cas où f est continue sur I , on sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ (ce qui utilise vraiment la continuité de f et l'unicité de la limite), on obtient $\ell = f(\ell)$ c'est-à-dire que les seules limites possibles sont les points fixes de f , obtenus lors de l'étude du signe de $f(x) - x$. On exclut par des considérations de monotonies, de majorations etc. toutes les limites sauf une.

Remarque.

1. Il n'est PAS QUESTION de prétendre traiter un exercice sur les suites récurrentes sans prononcer le mot *récurrence* !
2. On aura toujours intérêt, au moins au brouillon, à faire une représentation graphique de la suite.
3. Parfois l'intervalle stable contient les u_n seulement à partir d'un certain rang.
4. Pour le cas où f est décroissante, on pourra préciser le signe de $f \circ f(x) - x$, dans le but d'étudier les variations de $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$.
5. Une autre façon d'aborder le problème est d'essayer d'utiliser l'inégalité des accroissements finis. On se place sur I intervalle stable pour f . Alors par récurrence immédiate, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et est à valeurs dans I . Si ℓ est un point fixe de f dans I et que

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall t \in I, |f'(t)| \leq k$$

alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell| \text{ soit } |u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$$

Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Si $|k| < 1$, alors $|u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

6. Bien sûr, la méthode précédente ne pourra pas être appliquée si le majorant k de $|f'|$ ne peut pas être choisi strictement inférieur à 1.
7. Un gros avantage de la méthode précédente est que l'on a une estimation de la **vitesse de convergence**. En effet, $|u_n - \ell|$ représente l'erreur commise lorsque l'on approxime ℓ par u_n .
8. Certaines suites récurrentes sont d'une étude **très** difficile. Ça ne sera pas le cas pour les suites que vous aurez à étudier.
9. Les suites récurrentes ont des applications très variées. Ainsi il est souvent facile de décrire par une suite récurrente l'évolution d'un système, et souvent plus difficile d'étudier précisément cette suite.

2 Exemples

2.1 Exemple 1 : f croissante sur I

Soit à étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \end{cases}$$

On pose $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$.

Remarquons tout d'abord que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive. En effet, par récurrence on a :

- u_0 existe et est strictement positif.
- Pour n quelconque fixé, si u_n existe et est strictement positif, alors $u_n^2 + 8$ existe et est strictement positif donc u_{n+1} existe et est strictement positif.
- Par le principe du raisonnement par récurrence, la propriété est démontrée.

Étudions ensuite les variations de f et le signe de $f(x) - x$:
 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{3}x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) - x \geq 0 &\iff x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ &\iff (x - 2)(x - 4) \geq 0 \\ &\iff x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4 \end{aligned}$$

On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0	2	4	$+\infty$
f				$+\infty$

f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est vers un point fixe de f , c'est-à-dire 2 ou 4.

Il est clair que les intervalles $I_1 = [0, 2]$, $I_2 = [2, 4]$ et $I_3 = [4, +\infty[$ sont stables par f . Ainsi, par récurrence immédiate, si $u_0 \in I_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_k$.

cas 1 Si $u_0 \in [0, 2]$. On vient de dire que pour tout n , $u_n \in [0, 2]$. Donc, pour tout n , $f(u_n) \geq u_n$ vu le signe de $f(x) - x$ sur $[0, 2]$. Il suit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Mais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2 (car à valeurs dans $[0, 2]$) donc converge vers une limite ℓ .

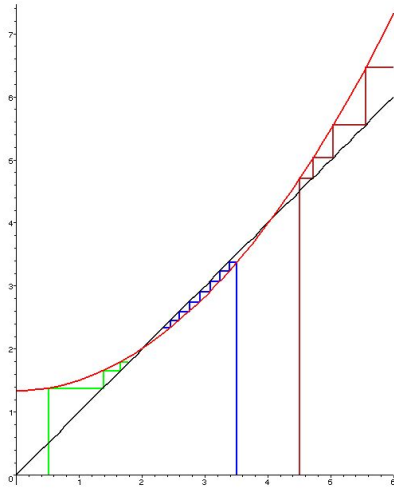
Les seules limites possibles sont 2 et 4. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$ donc par passage à la limite dans les inégalités, $\ell \leq 2$. Il suit que $\ell = 2$.

cas 2 Si $u_0 \in [2, 4[$. Par un raisonnement analogue, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[2, 4]$, décroissante, minorée par 2 donc converge vers ℓ , avec $\ell = 2$ ou

$\ell = 4$. Mais pour tout n , on a $2 \leq u_n \leq u_0 < 4$ donc par passage à la limite dans les inégalités, $2 \leq \ell \leq u_0 < 4$ et $\ell = 2$.

cas 3 Si $u_0 = 4$, par récurrence immédiate la suite est constante égale à 4.

cas 4 Si $u_0 > 4$, par un raisonnement analogue, la suite est à valeurs dans $[4, +\infty[$, croissante. Si elle convergerait, ce serait vers ℓ satisfaisant $4 < u_0 \leq \ell$ ce qui est impossible. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante non convergente, donc diverge vers $+\infty$.



On dit que 2 est un **point fixe attractif** de f et que 4 est un **point fixe répulsif** de f .

2.2 Exemple 2 : f décroissante sur I , utilisation des A.F.

Soit la suite définie par :

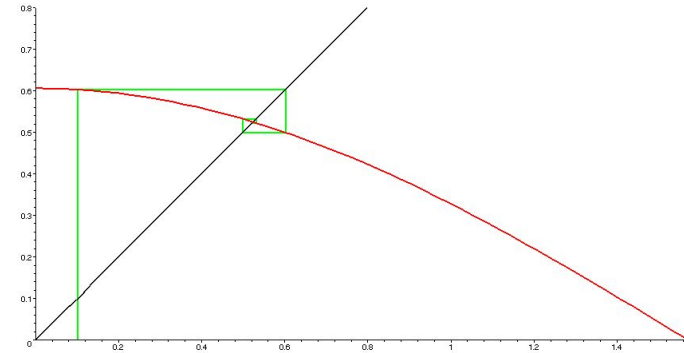
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos u_n \end{cases}$$

Tout d'abord, remarquons que quelle que soit la valeur de u_0 , $u_1 \in \left[-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $u_2 \in \left[0, \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par récurrence im-

médiate, on montre que $\forall n \geq 2, u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

L'étude des variations de $f : x \mapsto \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x$ ainsi que le signe de $f(x) - x$ ne pose pas de problème. On obtient le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
f	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	0
$f(x) - x$	+	0	-



On remarque que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f'(t)| = \left|\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sin t\right| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. On va pouvoir utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad \left|u_{n+1} - \frac{\pi}{6}\right| &= \left|f(u_n) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| \\ &\leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left|u_n - \frac{\pi}{6}\right| \end{aligned}$$

Donc, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 2, \quad \left|u_n - \frac{\pi}{6}\right| \leq \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^{n-2} \left|u_2 - \frac{\pi}{6}\right|$$

Comme $\left| \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right| < 1$, il vient que $u_n - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{6}$.

Remarque. On peut aussi montrer une divergence de suite récurrente dans le cas où f est décroissante à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. Le principe est le suivant. Si ℓ est un point fixe de f , que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $f'(\ell) < -1$, alors par continuité de f' on peut trouver $\lambda < -1$ et $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]\ell - \eta, \ell + \eta[, f'(t) \leq \lambda < -1$. Si $(u_n)_n$ convergeait vers ℓ , alors à partir d'un certain rang, tous les u_n seraient dans $]\ell - \eta, \ell + \eta[$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre u_n et ℓ , on obtiendrait $|u_{n+1} - \ell| \geq |\lambda| |u_n - \ell|$ donc par récurrence immédiate $|u_n - \ell| \geq |\lambda|^{(n-n_0)} |u_{n_0} - \ell|$. Comme $|\lambda| > 1$, la suite de terme général $|u_n - \ell|$ ne converge pas vers 0, ce qui est absurde.

2.3 Exemple 3 : f décroissante sur I , étude de $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$

Soit la suite définie par :

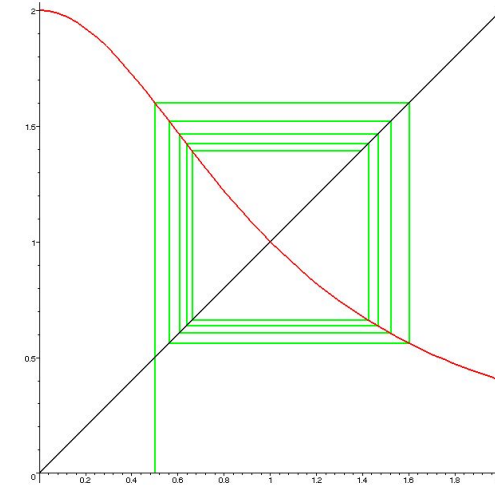
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$$

On montre par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

L'étude des variations de f est immédiate : $\forall x \geq 0, f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, $f(x) - x \geq 0 \iff x^3 + x - 2 \leq 0 \iff (x-1)(x^2 + x + 2) \leq 0 \iff x \leq 1$. 1 est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.

Observons ce qu'il se passe sur la représentation graphique de la suite :



Nous allons montrer que $u_{2p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ et $u_{2p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$. (Ces deux suites extraites vont être adjacentes.)

Posons $g = f \circ f$. Comme f est décroissante, g est croissante. Les deux suites extraites en questions sont définies par :

$$\begin{cases} u_{2 \cdot 0} = \frac{1}{2} \\ \forall p, u_{2(p+1)} = g(u_{2p}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{2 \cdot 0+1} = u_1 = \frac{8}{5} \\ \forall p, u_{2(p+1)+1} = g(u_{2p+1}) \end{cases}$$

On est donc ramené à l'étude de deux suites récurrentes dont les fonctions associées sont croissantes. On va en faire l'étude simultanée.

On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} g(x) - x \geq 0 &\iff \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + 4} - x \geq 0 \\ &\iff -\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(1+x^2)^2 + 4} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^3(x^2 + x + 2)}{(1+x^2)^2 + 4} \leq 0 \\ &\iff x \leq 1 \end{aligned}$$

On a le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
g	2 ↘	1 ↘	0
$g(x) - x$	+	0	-

Les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ sont stables par g , donc par récurrence immédiate, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p} \in [0, 1] \text{ et } u_{2p+1} \in [1, +\infty[$$

Il suit, vue l'étude du signe de $g(x) - x$ que :

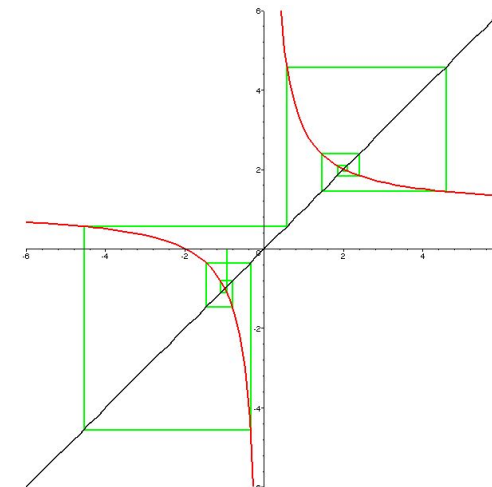
$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2(p+1)} = g(u_{2p}) \geq u_{2p} \\ u_{2(p+1)+1} = g(u_{2p+1}) \leq u_{2p+1} \end{cases}$$

Donc $(u_{2p})_p$ est une suite croissante et $(u_{2p+1})_p$ une suite décroissante. La première étant majorée par 1, elle converge et la seconde étant minorée par 1, elle converge. Le seul point fixe de g étant 1, elles convergent toutes les deux vers 1. Par suite, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

2.4 Exemple 4 : Tout n'est pas toujours très simple.

Observer graphiquement le comportement de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -0,95 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$



3 Utilisation de Maple

Calcul des termes successifs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

M1 Si l'on connaît N et que l'on veut calculer u_N , on peut utiliser un procédé itératif. La variable u désigne la valeur de u_n au rang n .

```
> f:=x-> f(x); # remplacer f(x) par son expression
> u:=u0; # remplacer u0 par sa valeur
> for n to N # remplacer N par sa valeur
do
u:=f(u):
od:
u;
```

M2 On peut utiliser @@ qui permet de composer une fonction N fois avec elle-même. Ainsi on obtiendra u_N avec l'instruction suivante :

```
> f:=x-> f(x); # remplacer f(x) par son expression
> (f@@N)(u0); # remplacer N et u0 par leurs valeurs
```

Représentation d'une suite récurrente On aura intérêt à utiliser l'instruction `display` de la bibliothèque `plots`. L'idée est de représenter sur un même graphe la courbe de f , la première bissectrice, et la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(u_n, u_{n+1}), (u_{n+1}, u_{n+1})$.

```
> f:=x-> f(x); # remplacer f(x) par son expression
> with(plots):
> A:=plot(f,a..b,c..d,scaling=constrained): # remplacer
a,b,c,d...
> B:=plot(x->x,a..b,color=black):
> u:=u0:L:=[u,0]: # remplacer u0
> for k to N # remplacer N
do
L:=L, [u,f(u)], [f(u),f(u)];
u:=f(u):
od:
> C:=plot([L],color=green):
> display([A,B,C]);
```

4 Cas des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

Ici encore, $\mathbb{K}$ désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il s'agit des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \text{ donnés dans } \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases} \quad (E)$$

Définition. On appelle **équation caractéristique** l'équation

$$r^2 - ar - b = 0$$

Résultat. On résout l'équation caractéristique.

cas 1 Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$. Alors toute suite satisfaisant (E) a un terme général de la forme :

$$u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$$

On détermine λ et μ à partir de u_0 et u_1

cas 2 Si l'équation caractéristique admet une racine double r dans $\mathbb{K}$. Alors toute suite satisfaisant (E) a un terme général de la forme :

$$u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

On détermine λ et μ à partir de u_0 et u_1

cas 3 Si l'équation caractéristique n'a pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$. On note $r = \rho e^{i\theta}$ une racine complexe de l'équation caractéristique. L'autre est $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$. Alors toute suite satisfaisant (E) a un terme général de la forme :

$$u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$$

On détermine λ et μ à partir de u_0 et u_1

Preuve. Admis pour l'instant. Nécessite quelques connaissances d'algèbre linéaires. À rapprocher de l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. $\square$

Remarque. Dans le troisième cas, on peut transformer cette écriture en $u_n = \rho^n (A \cos(n\theta + B))$.

Preuve.

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) \\ &= \rho^n \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \cos n\theta + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \sin n\theta \right) \\ &= \rho^n (A \cos(n\theta + B)) \end{aligned}$$

en posant $A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ et B tel que $\begin{cases} \cos B = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \\ -\sin B = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \end{cases}$ □

Exemple 1. La suite de FIBONACCI.

Elle est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ pour racines réelles distinctes, donc il existe λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Exemple 2. Soit la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ qui admet $\frac{1}{2}$ pour racine double donc il existe λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 9$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ (\lambda + \mu) \frac{1}{2} = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 17 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (17n + 1) \frac{1}{2^n}$$

Exemple 3. Soit la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 4 = 0$ de discriminant négatif. Les racines complexes conjuguées sont $2j = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $2j^2$. donc il existe λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \left(\lambda \cos \frac{2\pi n}{3} + \mu \sin \frac{2\pi n}{3} \right)$$

Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ 2 \left(\lambda \cos \frac{2\pi}{3} + \mu \sin \frac{2\pi}{3} \right) \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$$

5 Complément : Cas des suites récurrentes affines du premier ordre à coefficients constants

$\mathbb{K}$ désigne ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il s'agit des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

1. Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique de raison b .
2. Si $a \neq 1$, on se ramène à une suite géométrique en prenant $\lambda \in \mathbb{K}$ (à choisir ultérieurement) et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \lambda$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \lambda \\ &= au_n + b + \lambda \\ &= a(v_n - \lambda) + b + \lambda \\ &= av_n + ((1-a)\lambda + b) \end{aligned}$$

En posant $\lambda = \frac{b}{a-1}$, on voit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a . On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n v_0$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}$$

6 Complément : Cas des suites homographiques.

Définition. On appelle **suite homographique** une suite définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarques.

- Il est difficile en général de montrer qu'une telle suite est bien définie. Il faudrait s'assurer que pour tout n , $u_n \neq -\frac{d}{c}$.
- L'équation $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ permettant de rechercher les seules candidats-limites est équivalente à $cx^2 + (d-a)x - b = 0$, qui possède zéro, une ou deux racines réelles.

Étude.

- S'il n'y a pas de racine réelle, alors la suite ne peut pas converger.
- S'il y a une racine réelle double ℓ , c'est l'unique candidat-limite. Si u_n prend la valeur ℓ pour un certain n , on montre par récurrence immédiate qu'elle est constante égale à ℓ à partir de ce rang. Sinon, on remarque alors que la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \ell}$$

est une suite arithmétique de raison $\frac{2c}{a+d} \neq 0$ (faire le calcul), qui diverge donc vers $\pm\infty$. Il suit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si elle est définie, converge vers ℓ .

- S'il y a deux racines réelles α et β . Si u_n prend la valeur α ou β pour un certain n , on montre par récurrence immédiate qu'elle est constante

égale à cette valeur à partir de ce rang.

Sinon, on remarque que la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

est une suite géométrique de raison $\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$ (faire le calcul). L'étude de la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet alors de déduire celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.