Équivalents usuels

1. Équivalents provenant de la définition de la dérivée

Propriété. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$, donc

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

On en déduit les équivalents suivants : ($\alpha \in \mathbb{R}$ fixé)

$$\begin{array}{ccc}
e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \\
\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x & \mathrm{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x & \arcsin x \underset{x \to 0}{\sim} x \\
\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x & \mathrm{th} x \underset{x \to 0}{\sim} x & \arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x
\end{array}$$

2. Autres équivalents classiques trigonométriques

Remarque. $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ et $\mathrm{ch}x - 1 = 2\mathrm{sh}^2 \frac{x}{2}$. On en déduit :

$$1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \mathrm{ch}x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

3. Polynômes et fractions rationnelles

Tout polynôme non nul est équivalent en $+\infty$ et $-\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme non nul est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.
Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en $+\infty$ et $-\infty$ au quotient de ses termes de plus haut degré.
Toute fraction rationnelle non nulle est équivalente en 0 au quotient de ses termes de plus bas degré.

$$x^5 - 3x^2 + 7x \underset{x \to 0}{\sim} 7x \qquad x^5 - 3x^2 + 7x \underset{x \to -\infty}{\sim} x^5 \qquad \frac{x^3 - x}{x^4 + x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \qquad \frac{2x^4 - x^2 + x}{x^2 - 1} \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

4. Cas des recherches d'équivalents ailleurs qu'en 0 et $+\infty$

La plupart des équivalents usuels sont donnés en 0. On s'y ramène par un changement de variable. Pour trouver un équivalent de $f(x)$ au voisinage de α, on pose $t = (x - \alpha)$ et on cherche un équivalent de $f(t + \alpha)$ au voisinage de 0.

Exemple. On cherche un équivalent de $f : x \mapsto \frac{x^3+2x}{x^2+x-6}$ au voisinage de 2. On pose $t = x - 2$ et on a

$$f(x) = f(2+t) = \frac{(2+t)^3 + 2(2+t)}{(2+t)^2 + (2+t) - 6} = \frac{t^3 + 6t^2 + 14t + 12}{t^2 + 5t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{12}{5t}$$

Ainsi $f(x) \underset{x \to 2}{\sim} \dfrac{12}{5(x-2)}$.

6. La fonction arccos

Puisque $\arccos x \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$, on a

$$\arccos x \underset{x \to 1^-}{\sim} \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

(d'après Monier, *Analyse 2*, éd. Dunod)