

Complément au chapitre 15

CONVEXITÉ

PTSi2

2002–2003

Abstract

Nous allons introduire la notion de **convexité** des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, citer quelques propriétés et démontrer des inégalités classiques. Ce complément de cours est hors du programme de la filière PT, mais est au programme de la filière PSi. Il est bon d'en avoir quelques notions : on connaîtra en particulier la définition d'une fonction convexe ou concave, ainsi que sa caractérisation dans le cas des fonctions deux fois dérivables. Ces notions sont parfois exigées aux concours de la filière PT.

I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Définition

Définition. (Convexité d'une fonction)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

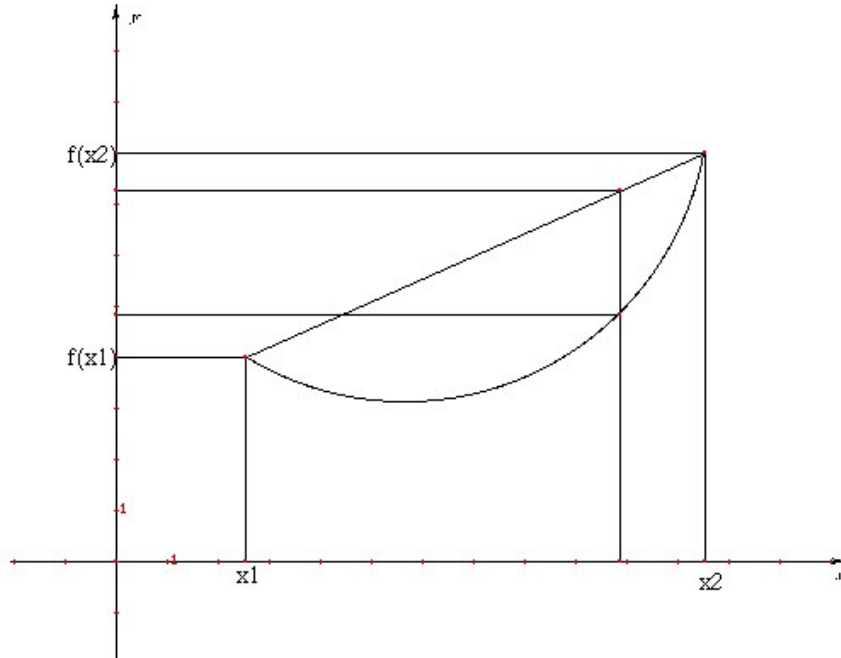
On dit que f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe.

Interprétation graphique. (Voir FIG. 1)

x_1 et x_2 sont des éléments de I . Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ est compris entre x_1 et x_2 . L'inégalité de convexité s'interprète géométriquement en exprimant que le point M_λ de la courbe représentative de f , de coordonnées $(x_\lambda, f(x_\lambda))$, est *en dessous* du point N_λ de coordonnées $(x_\lambda, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2))$. Ce dernier point est sur la corde joignant P_1 et P_2 , de coordonnées respectives $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

On dit que f est convexe si et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous de toutes ses cordes**.

Figure 1: Interprétation géométrique de la convexité



Définition. (Convexité d'une partie du plan)

Une partie E du plan est **convexe** si et seulement si :

$$\forall (A, B) \in E^2, [A, B] \subset E$$

où $[A, B]$ est le segment joignant A et B , *i.e.* l'ensemble des barycentres de $\{(A, \lambda), (B, \mu)\}$ avec λ et μ positifs ou nuls. (*C'est ce que l'on croit.*)

Proposition. (Caractérisation des applications convexes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \{(x, y) \text{ t.q. } y \geq f(x)\}$ est une partie convexe du plan ;
(*E s'appelle l'épigraphe de f*)
- (ii) f est une fonction convexe ;
- (iii) Pour tout a de I , $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante.
(*C'est bien le taux d'accroissement de f en a*)

Preuve. Par ■ chaîne d'implications ■

$(i) \implies (ii)$ Facile, vue l'interprétation géométrique.

$(ii) \implies (iii)$ On fixe un a de I , et on va montrer que le taux d'accroissement $\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissant. Soit x, y, z, t tels que $x < y < a < z < t$. Si nous montrons que $\varphi(x) \leq \varphi(y) \leq \varphi(z) \leq \varphi(t)$, nous aurons terminé. Or, avec $\lambda = \frac{a - y}{a - x}$, $y = \lambda x + (1 - \lambda)a$ donc $f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(a)$, ce qui est la première inégalité. Les deux autres inégalités se montrent de même.

$(iii) \implies (i)$ Soit (x, y) et (t, z) deux points de l'épigraphe. On a donc $y \geq f(x)$ et $z \geq f(t)$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $\lambda y + (1 - \lambda)z \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)t)$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(t) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)t)$$

et de conclure en utilisant $y \geq f(x)$ et $z \geq f(t)$. L'inégalité que l'on doit montrer est évidente lorsque λ est 0 ou 1. Et lorsque ce n'est pas le cas, on pose $a = \lambda x + (1 - \lambda)t$ et l'inégalité que l'on veut montrer s'écrit :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

qui est vérifiée d'après l'hypothèse de croissance du taux d'accroissement.

□

2 Inégalité de Jensen

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Preuve. par récurrence sur n .

La proposition est évidente pour $n = 1$ et $n = 2$ (par définition de la convexité).

Supposons la proposition vérifiée pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, fixé. Soit alors $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Deux cas se présentent alors :

- 1er cas : si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, alors l'inégalité à démontrer est évidente.
- 2ème cas : Sinon, on pose $\mu = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} > 0$ et notons $x' = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.
(On a regroupé les n premiers termes, et isolé le $n+1$ -ème.) Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f(\mu x' + (1 - \mu)x_{n+1}) \\ &\leq \mu f(x') + (1 - \mu)f(x_{n+1}) \\ &= \mu f(x') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour évaluer $f(x')$:

$$f(x') = f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\mu} f(x_k) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Le résultat suit alors facilement. □

Exemple. On peut déduire de l'inégalité de JENSEN l'inégalité classique suivante :

$$\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

Preuve. On applique l'inégalité à la fonction $x \mapsto e^x$, dont on montrera la convexité un peu plus tard¹, avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$. On obtient ce que l'on veut en posant alors $y_i = e^{x_i}$ et en passant au logarithme. □

¹Graphiquement, vous pouvez accepter ce résultat. On aura au paragraphe 4 un critère très commode pour étudier la convexité des fonctions deux fois dérivables.

3 Lien avec la dérivabilité et la continuité

Cette étude n'est pas au programme.

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Alors en tout point a de I qui n'est pas une extrémité de I , f est dérivable à gauche et à droite.

Preuve. Soit $a \in I$, qui n'est pas une extrémité de I . Alors le taux d'accroissement de f en a est défini à droite et à gauche de a . Et pour tout (x, y) tel que : $x < a < y$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

par la propriété de croissance du taux d'accroissement. Fixons y . Toujours en utilisant cette propriété de croissance du taux d'accroissement en a , le membre de gauche est fonction croissante de x pour $x < a$, majoré par la constante membre de droite, donc admet une limite à gauche en a , par le théorème de la limite monotone. C'est exactement dire que f admet une dérivée à gauche en a .

Un raisonnement similaire s'applique à droite, pour montrer que f est dérivable à droite en a . Par prolongement des inégalités larges, on peut même affirmer que :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

□

Corollaire. Si f est convexe sur l'intervalle I , alors f est continue sur I , sauf peut-être aux extrémités de I .

Preuve. Étant dérivable à gauche et à droite en tout point a de I , sauf peut-être aux extrémités, f y est continue. □

Exemples. On réfléchira aux trois exemples suivants de fonctions définies sur $[-1, 1]$ pour ne pas faire de généralisation abusive de ces résultats :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = -1 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad g : x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2} \quad h : x \mapsto |x|$$

4 Cas des fonctions dérivables

À savoir

Théorème. (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante.

Preuve. Par double implication.

⇒ Si f est convexe, alors pour a et b tels que $a < b$ on a, pour tout (u, v) tels que $a < u < v < b$, par la croissance des taux d'accroissement :

$$\frac{f(a) - f(u)}{a - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(b) - f(v)}{b - v}$$

Faisant tendre u vers a et v vers b , on obtient :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

donc f' est croissante.

⇐ On suppose que f' est croissante sur I . Soit a et b tels que $a < b$ et $\lambda \in]0, 1[$. (Si $a > b$, on échange le rôle de a et b ; si $a = b$ ou $\lambda = \pm 1$, le résultat est trivial.) On veut montrer que $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$. Notons $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ et appliquons le théorème des accroissements finis à f sur $[a, x]$ d'une part, sur $[x, b]$ d'autre part. Les hypothèses de continuité et dérivabilité sont bien vérifiées. Alors il existe $c_1 \in]a, x[$ et $c_2 \in]x, b[$ tels que :

$$\begin{cases} f(x) - f(a) = f'(c_1)(x - a) = (1 - \lambda)(b - a)f'(c_1) \\ f(b) - f(x) = f'(c_2)(b - x) = \lambda(b - a)f'(c_2) \end{cases}$$

Mais par hypothèse, f' est croissante donc $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ donc $\lambda(f(x) - f(a)) \leq (1 - \lambda)(f(b) - f(x))$, ce qui est l'inégalité à démontrer.

□

Corollaire. (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I . f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$.

Preuve. Immédiat

□

Exemples. $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Exemple. $\sin$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc la courbe est en dessous de sa tangente en 0 et au dessus de sa corde. D'où l'inégalité classique à connaître :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Définition. On dit que f admet en a un **point d'inflexion** si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a
- (ii) f' admet en a un extremum local
- (iii) f change de concavité en a

Exemple. $x \mapsto x^3$ admet en 0 un point d'inflexion. $x \mapsto x^6$ n'admet pas en 0 de point d'inflexion.