CLASSES SUPÉRIEURES PTSI ET SPÉCIALES PT

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I OBJECTIFS DE FORMATION

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière PT, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique consituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Les démonstrations qui sont utiles à une bonne compréhension du cours sont au programme. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels.
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux–mêmes des questions, c'est–à–dire à prendre en compte une problématique mathématique.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre. C'est dans cette perspective, et à l'opposé de tout dogmatisme, que les structures constituent un outil pour une meilleure compréhension et une meilleure précision de la pensée et fournissent des méthodes pour l'étude des problèmes mathématiques.

- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement de modèles continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, notamment en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.
En première année, la maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.
En seconde année, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales (notions sur les transformations de Fourier et de Laplace et sur les intégrales eulériennes), l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle), l'étude des fonctions de plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des anneaux et des corps ainsi que l'étude générale des groupes en ont été écartées.
Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.
En première année, le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, calcul matriciel, espaces vectoriels euclidiens, automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace) et de ses interventions en algèbre, en analyse et en géométrie affine et euclidienne du plan et de l'espace.
En seconde année, le programme est organisé autour de l'algèbre linéaire (réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention : apports du langage géométrique et des modes de représentation.

e) *Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles (mécanique, électrocinétique, électronique, automatique, optique, cinétique chimique), le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets (vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, équations différentielles modélisant l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

f) *Rôle de la pensée algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intégre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances. En mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes n'est exigible des étudiants.
Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie, qu'ils soient mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En outre, de nombreux travaux pratiques donnent lieu à l'exploitation du logiciel de calcul symbolique et formel étudié dans le programme d'informatique.

g) *Emploi des calculatrices*

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe et de la discipline considérées. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir–faire de base et sont seules exigibles :
- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

3) Conception et organisation de la formation

a) *Organisation du travail de la classe*

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit–il, de théories éventuellement suivies d'applications. Il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous–tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'analyser les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée. . .), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement. . .). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et résultats essentiels, savoir analyser les démarches mises en jeu dans les démonstrations et les techniques de raisonnement, maîtriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type d'exercices est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés, en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances à mettre en œuvre dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser les exigences mentionnées par le programme. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barême doit en tenir compte. En première période des classes de première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution.
- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse critique, grâce à une analyse comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année dans les épreuves d'admission en seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

4) Interprétation et délimitation des programmes

a) *Objectifs*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des concours. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets proposés aux concours.

b) *Organisation du texte des programmes*

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles–mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.

- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des travaux pratiques, également présentés en deux colonnes ; à gauche sont fixés d'une part le champ des questions mathématiques à étudier et d'autre part les méthodes et les techniques à connaître et à savoir mettre en œuvre, à droite un commentaire indique des repères pour le niveau d'approfondissement à donner à cette étude ou à cettte mise en œuvre. Les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe §.

En outre, en seconde période de la classe PTSI, un module optionnel d'une heure supplémentaire de cours est attribué aux étudiants qui se destinent à la classe PSI, et qui vient s'ajouter à l'horaire hebdomadaire commun de 9 heures (6 heures de cours et 3 heures de Travaux Dirigés). La rédaction ci-dessous a été conçue en fonction de l'horaire hebdomadaire de 9 heures. Les parties spécifiques au module optionnel sont encadrées par le signe ★. Pour ces parties, des commentaires précisent, le cas échéant, l'importance qu'il convient de leur donner dans le cadre de l'horaire de 9 heures.

c) *Connaissances et capacités exigibles des étudiants*

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.
- Celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes et des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite, dans les bandeaux ou dans les travaux pratiques.
- Celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant "hors programme". Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
- Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants : il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution "exemples de ..." (dont la fonction est d'indiquer le champ des problèmes et des phénomènes mathématiques à étudier) et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution "aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants", accompagnée le cas échéant de la locution "les méthodes à suivre, ou les indications utiles, doivent être fournies aux étudiants".

En outre, pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution "la démonstration n'est pas exigible des étudiants", le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre. La locution "la démonstration est hors programme"signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat.

Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution "définition de..." ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

II PROGRAMME DE LA CLASSE PTSI

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : suites de nombres réels et de nombres complexes, fonctions définies sur un intervalle de **R** *à valeurs réelles ou complexes, courbes planes, notions élémentaires sur les fonctions de deux variables réelles.*
Le programme combine l'étude globale des suites et des fonctions (opérations, majorations, monotonie, ★ convexité ★, existence d'extremums...) et l'étude de leur comportement local ou asymptotique. En particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de tangente.
Il combine aussi l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie d'une suite ou d'une fonction, existence de limites, continuité, existence de zéros et d'extremums de fonctions, existence de tangentes...) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, évaluations asymptotiques de suites et de fonctions, approximations de zéros et d'extremums de fonctions, propriétés métriques des courbes planes...).
En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue ou du module, emploi du calcul différentiel et intégral (recherche d'extremums, inégalités des accroissements finis et de la moyenne, majorations tayloriennes...). Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations (caractère borné, caractère croissant, existence d'une limite, continuité en un point, continuité sur un intervalle, dérivabilité en un point...). En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (approximations de solutions d'équations numériques, approximations d'une intégrale...) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé de courbes.

I. NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES, SUITES ET FONCTIONS

Cette partie figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

Pour l'existence et la recherche de limites de suites ou de fonctions, il convient d'utiliser les résultats établis dans le cours, de préférence au recours direct à la définition.

1- Nombres réels

Il est souvent commode d'identifier la droite euclidienne munie d'une base orthonormale au **R***-espace vectoriel* **R***, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres réels.*
La notion de corps totalement ordonné est hors programme.

Corps **R** des nombres réels ; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.

La construction du corps des nombres réels est hors programme.

Valeur absolue d'un nombre réel, distance de deux points, valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
Inégalité triangulaire

$$||x|-|y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

Interprétation en termes de distances.

En particulier, si $|u| \leqslant k < 1$, alors

$$1-k \leqslant |1+u| \leqslant 1+k.$$

Les étudiants doivent savoir utiliser ces inégalités afin de majorer ou minorer le module d'une somme.

Définition des intervalles de **R**.

Définition d'un majorant, d'un minorant, du plus grand et du plus petit élément d'une partie.
Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.

Il convient de préciser, par des exemples simples, la notion de borne supérieure (qu'elle soit atteinte ou non).

Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Partie entière d'un nombre réel. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} ; approximation par défaut, par excès.

La notion de développement décimal illimité est hors programme.

Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs. Bijection $x \mapsto e^x$ (noté également $x \mapsto \exp x$) de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$; bijection réciproque $y \mapsto \ln y$.

La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont supposées connues, ainsi que leurs équations fonctionnelles.

2- Suites de nombres réels

L'objectif principal est l'étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée, en relation avec la description de phénomènes discrets.

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements...).
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cours que des problèmes, le fait que pour étudier la convergence d'une suite u_n vers un nombre a, il est utile de se ramener à la convergence de $u_n - a$ vers 0.

Pour la notion de limite d'une suite (u_n) de nombres réels, on adopte les définitions suivantes :
- Étant donné un nombre réel a, on dit que (u_n) admet a pour limite si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier n, la relation $n \geqslant N$ implique la relation $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$; le nombre a est alors unique, et on le note $\lim_n u_n$. Lorsqu'un tel nombre a existe, on dit que la suite (u_n) est convergente, ou qu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est divergente.
- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque a est remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$; on dit alors que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Tout vocabulaire topologique est hors programme.

a) Suites de nombres réels

Ensemble des suites de nombres réels, relation d'ordre.
Suites majorées, minorées, bornées.
Suites monotones, strictement monotones.

Pour la présentation du cours, le programme se place dans le cadre des suites indexées par $\mathbf{N}$. On effectue ensuite une brève extension aux autres cas usuels.

b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence.
Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $u_n \to a$ équivaut à $u_n - a \to 0$.

Toute suite convergente est bornée.

Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Ensemble des suites convergeant vers 0 ; produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0.

Opérations algébriques sur les limites; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Si $|u_n| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si $v_n \to a$ et $w_n \to a$, alors $u_n \to a$.
Si $v_n \leqslant u_n$ et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.

Toute suite croissante majorée (u_n) converge, et

$$\lim_n u_n = \sup_n u_n .$$

Extension au cas d'une suite croissante non majorée.

Suites adjacentes.

Cas particulier de la dichotomie.

c) Relations de comparaison

Étant donnée une suite (α_n) de nombres réels non nuls, définition d'une suite (u_n) de nombres réels dominée par (α_n), négligeable devant (α_n).

Les notations de Landau ne sont pas exigibles des étudiants ; leur utilisation dans la pratique ne peut être que très progressive.

Caractérisations à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{\alpha_n}$.

Définition de l'équivalence de deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels non nuls. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Notation $u_n \sim v_n$.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$.

Si $u_n = \alpha_n + w_n$, où w_n est négligeable devant α_n, alors $u_n \sim \alpha_n$.

Si $u_n \sim v_n$, alors, à partir d'un certain rang, le signe de u_n est égal à celui de v_n.

Comparaison des suites de référence :

$$n \mapsto a^n,\ n \mapsto n^\alpha,\ n \mapsto (\ln n)^\beta,\ n \mapsto n!$$

où $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

3- Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

L'objectif est double :
- Étude du comportement global et local d'une fonction donnée, en relation avec la description de l'évolution de phénomènes continus.
- Emploi de fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques, d'équations différentielles, mesures de grandeurs géométriques et physiques...).

En ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cours que des problèmes, le fait que pour établir qu'un nombre b est limite d'une fonction f, il est utile de se ramener au cas $b = 0$.

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points et à valeurs réelles.

Pour la notion de limite d'une fonction f en un point a (appartenant à I ou extrémité de I), on adopte les définitions suivantes :
- Étant donnés des nombres réels a et b, on dit que f admet b pour limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de I, la relation $|x-a| \leqslant \delta$ implique la relation $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$; le nombre b est alors unique, et on le note $\lim_a f$. Lorsqu'un tel nombre b existe, on dit que f admet une limite finie au point a.
- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque a ou b sont remplacés par $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert de centre a lorsque $a \in \mathbf{R}$, avec un intervalle $]c, +\infty[$ lorsque $a = +\infty$ et avec un intervalle $]-\infty, c[$ lorsque $a = -\infty$.
Tout autre vocabulaire topologique est hors programme.

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Ensemble des fonctions à valeurs réelles, relation d'ordre.
Fonctions majorées, minorées, bornées.
Somme, produit, composée de deux fonctions.

Définition de $|f|$, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$, f^+ et f^-.

Relations $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Définition d'un extremum, d'un extremum local.

Notations $\max\limits_{x\in I} f(x)$ et $\max\limits_{I} f$.

Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.

Notations $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $\sup\limits_{I} f$.

Fonctions monotones, strictement monotones, paires, impaires, T-périodiques.

b) Étude locale d'une fonction

Limite d'une fonction f en un point a, continuité en un point. Lorsque $b \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ équivaut à la relation $f(x) - b \to 0$. Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ lorsque $x \to a$ équivaut à la relation $f(a+h) \to b$ lorsque $h \to 0$.	Lorsque $a \in I$, dire que f a une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point. Lorsque $a \notin I$, f a une limite finie en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point.
Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.	Les limites à gauche (ou à droite) en a sont définies par restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (à $I \cap]a, +\infty[$).
Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.	Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.
Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	Si $\lvert f(x) \rvert \leqslant g(x)$ et $g(x) \to 0$, alors $f(x) \to 0$. Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si $g(x) \to b$ et $h(x) \to b$, alors $f(x) \to b$.
Limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente.	
Existence d'une limite d'une fonction monotone.	Comparaison des bornes (supérieure ou inférieure) et des limites (à gauche ou à droite).

c) Relations de comparaison

Étant donnés un point a (appartenant à I ou extrémité de I) et une fonction φ à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur I privé de a, définition d'une fonction f à valeurs réelles, dominée par φ (négligeable devant φ) au voisinage de a.	Les notations de Landau ne sont pas exigibles des étudiants ; leur utilisation dans la pratique ne peut être que très progressive. Caractérisations à l'aide du quotient $\dfrac{f}{\varphi}$.
Définition de l'équivalence au voisinage de a de deux fonctions f et g à valeurs réelles ne s'annulant pas sur I privé de a. Équivalent d'un produit, d'un quotient.	Notation $f \sim g$. Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{f}{g}$.
Si $f = \varphi + h$, où h est négligeable devant φ, alors $f \sim \varphi$.	Si $f \sim g$ alors, au voisinage de a, le signe de $f(x)$ est égal à celui de $g(x)$.
Comparaison, lorsque $x \to +\infty$, des fonctions $$x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x},\ x \mapsto x^{\beta},\ x \mapsto (\ln x)^{\gamma}.$$ Comparaison, lorsque $x \to 0$, des fonctions $$x \mapsto x^{\alpha} \text{ et } x \mapsto \big(\ln x\big)^{\beta}.$$	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point ; opérations algébriques sur les développements limités : somme, produit ; développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$, application au quotient.	Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

d) Fonctions continues sur un intervalle

Algèbre $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I et à valeurs réelles. Composée de deux fonctions continues.	Si f est continue, $\lvert f \rvert$, f^{+}, et f^{-} le sont.

Restriction d'une fonction continue à un intervalle J contenu dans I.
Prolongement par continuité en une extrémité de I.

Si f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f l'est aussi sur $[a, c]$.

Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue.
Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

La démonstration de ces trois résultats est hors programme, ainsi que la notion de continuité uniforme.
Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de la bijection réciproque.

4- Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de Terminale. Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques, à la trigonométrie et à la géométrie.

En ce qui concerne les suites et fonctions à valeurs complexes, l'objectif est d'effectuer une très brève extension des principales propriétés des suites et fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.

Il est souvent commode d'identifier $\mathbf{C}$ à l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$, notamment pour les problèmes d'origine géométrique, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres complexes.

a) Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes

Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, opérations sur les nombres complexes, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans $\mathbf{C}$.

La construction du corps $\mathbf{C}$ est hors programme.
Notations $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$.

Affixe d'un point, d'un vecteur ; image d'un nombre complexe.

Interprétation géométrique des transformations $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto z + b$.

Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire. Interprétation en termes de distances.
Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1.

Notation $|z|$; relation $|z|^2 = z\bar{z}$.
Interprétation géométrique de $|z|$, de $|z - a|$; disque ouvert (fermé) de centre a.
Si $|u| \leqslant k < 1$, alors

$$1 - k \leqslant |1 + u| \leqslant 1 + k.$$

b) Suites et fonctions à valeurs complexes

Parties réelle et imaginaire d'une suite ; conjugaison.
Suites bornées.
Limite d'une suite de nombres complexes, convergence et divergence. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire.
Toute suite convergente est bornée.
Opérations algébriques sur les limites.

Par identification canonique de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$, les notions de ce paragraphe s'appliquent aux suites et aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

Parties réelle et imaginaire d'une fonction ; conjugaison.
Fonctions bornées.

Notations $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\bar{f}$, $|f|$.

Limite d'une fonction à valeurs complexes en un point a, continuité en un point ; caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire.
Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.
Opérations algébriques sur les limites.

Algèbre $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes.

c) Groupe $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition de $e^{i\theta}$, relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$; formule de Moivre. Relations d'Euler.

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une application surjective du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$. En outre, la relation $e^{i\theta} = 1$ équivaut à la relation $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$.

Par définition, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ où $\theta \in \mathbf{R}$. La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions cosinus, sinus et tangente sont supposées connues, ainsi que leurs formules d'addition. Les étudiants doivent savoir exprimer $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ et $e^{i\theta}$ à l'aide de $\tan\dfrac{\theta}{2}$ et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1.

Arguments d'un nombre complexe. Écriture d'un nombre complexe $z \neq 0$ sous la forme $\rho\, e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ (forme trigonométrique).

Groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.

d) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$\exp z = e^z = e^x e^{iy} \quad \text{où} \quad z = x + iy.$$

L'application $z \mapsto e^z$ (également notée $z \mapsto \exp z$) est une application surjective de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$. En outre, la relation $e^z = 1$ équivaut à la relation $z \in 2i\pi\mathbf{Z}$.

Relation $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Module et arguments de e^z ; résolution de l'équation $e^z = a$.

La notion de logarithme complexe est hors programme.

e) Nombres complexes et géométrie plane

(Seconde période)

Interprétation des transformations : $z \mapsto az$, $z \mapsto az + b$.

Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$.

Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, alignement, orthogonalité.

Travaux pratiques

Exemples d'obtention de majorations et de minorations d'expressions réelles et de leur emploi pour l'étude de suites et de fonctions.

§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes.

Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur, notamment pour évaluer le poids respectif des termes d'une somme.

§ Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il convient de mettre en valeur le rôle des variations de f et les interprétations graphiques. L'étude est à mener sur des exemples ; aucun énoncé général n'est exigible des étudiants.

Exemples d'étude du comportement local et asymptotique de fonctions d'une variable réelle et d'emploi de développements limités.

L'étude de singularités et la recherche de développements limités ne sont pas des objectifs en soi, et tout excès de technicité sur ces points est à éviter.

Exemples d'étude du comportement global de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : étude des variations, des zéros et du signe.

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en algèbre (polynômes, équations algébriques...).

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en trigonométrie.

Les étudiants doivent savoir linéariser un polynôme trigonométrique, exprimer une somme de deux cosinus ou de deux sinus sous forme de produit, connaître les expressions de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $1+\cos\theta$ et $1-\cos\theta$ à l'aide de $\theta/2$, ainsi que la relation $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ et son interprétation géométrique.

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en géométrie plane.

II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Cette partie figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

Le programme est organisé autour de trois axes :
- Dérivation en un point et sur un intervalle ; notions sur la convexité.
- Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux, à partir de l'intégration des fonctions en escalier.
- Théorème fondamental reliant l'intégration et la dérivation ; exploitation de ce théorème pour le calcul différentiel et intégral, et notamment pour les formules de Taylor.
Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

L'étude générale de la dérivation et de l'intégration doit être illustrée par de nombreux exemples portant sur les fonctions usuelles (qui, par commodité de rédaction, ne figurent qu'au chapitre 6) et celles qui s'en déduisent.

Les fonctions considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de **R** *contenant au moins deux points et, dans les trois premiers chapitres, sont à valeurs réelles.*

1- Dérivation des fonctions à valeurs réelles

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Extremums locaux des fonctions dérivables.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et l'interprétation cinématique de la notion de dérivée en un point.
La dérivabilité à gauche et à droite n'implique pas la dérivabilité.

Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

Notations f', $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
La démonstration du théorème concernant la dérivabilité d'une fonction réciproque est hors programme.

Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz).

Notations $f^{(k)}$, $D^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

b) Étude globale des fonctions dérivables

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis :
- si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$;
- si $|f'| \leqslant k$, alors $|f(b)-f(a)| \leqslant k\,(b-a)$.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables.

Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation graphique et cinématique de ces résultats.

c) Fonctions convexes

(Seconde période)

★ Définition, interprétation graphique (tout sous-arc est sous sa corde).
Croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité.

Inégalité de convexité : si $\lambda_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, alors

$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(a_j).$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, f est convexe si et seulement si f'' est positive. La courbe est alors située au dessus de chacune de ses tangentes ★.

L'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions convexes est hors programme.

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Les notions de fonction réglée et de fonction intégrable au sens de Riemann sont hors programme.
En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de définir la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque, mais, en mathématiques, aucune connaissance spécifique sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Fonctions continues par morceaux

Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a, b]$, d'une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à φ. Opérations sur les fonctions en escalier.

Définition des fonctions continues par morceaux sur un segment.

★ Approximation des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon \ ★.$$

La démonstration de ce résultat est hors programme.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Linéarité. Croissance.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Notations $\int_I f$, $\int_{[a,b]} f$. Linéarité.
Croissance ; inégalité $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$.
Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Invariance de l'intégrale par translation.

Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction à valeurs positives en termes d'aire. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur la notion d'aire.
Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles des étudiants. ★ Dans le cadre de l'horaire de 9 heures, elles sont hors programme; il convient de s'appuyer alors sur l'interprétation en termes d'aire pour introduire l'intégrale ★.

Valeur moyenne d'une fonction.

Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

En particulier

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

Toute autre formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.
Produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_I fg$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$; inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où a et b appartiennent à I. Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

3- Intégration et dérivation

a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive d'une fonction continue.
Deux primitives d'une même fonction différent d'une constante.

Il convient de montrer sur des exemples que cette définition ne peut être étendue sans changement au cas des fonctions continues par morceaux.

Théorème fondamental : étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I et un point $a \in I$,

- la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;

- pour toute primitive h de f sur I,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a).$$

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur I et une fonction φ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a, b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$.

b) Formules de Taylor

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I, formule de Taylor à l'ordre p en un point a de I.

Relation $f(x) = T_p(x) + R_p(x)$, où

$$T_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a).$$

★ Expression intégrale du reste ★.

Majoration du reste : inégalité de Taylor-Lagrange.

Développement limité d'une primitive, d'une dérivée.
Existence d'un développement limité à l'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: formule de Taylor-Young.

4- Dérivation et intégration des fonctions à valeurs complexes

L'objectif est d'effectuer une très brève extension des notions et propriétés suivantes, vues pour les fonctions à valeurs réelles, aux fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs complexes.

Par identification de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$, les notions de ce chapitre s'appliquent aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

a) Dérivation

Dérivabilité en un point, caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire ; opérations sur les fonctions dérivables. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs complexes, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$; dérivée n-ième d'un produit.

Caractérisation des fonctions constantes.
Il convient de montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que le théorème de Rolle ne s'étend pas.

b) Intégration

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, linéarité.

Inégalité $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

La démonstration de cette inégalité est hors programme.

c) Intégration et dérivation

Extension du théorème fondamental.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Interprétation cinématique.

5- Courbes planes paramétrées

Dans ce chapitre, on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$.

L'objectif est d'exploiter, par identification de $\mathbf{C}$ au plan euclidien $\mathbf{R}^2$, les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs complexes pour l'étude cinématique et géométrique des courbes planes.

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

L'étude des courbes paramétrées fait l'objet d'un approfondissement au chapitre IV.1.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$; interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Étant données deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dérivation de $(f|g)$, de $\|f\|$ et de $\mathrm{Det}\,(f,g)$.

En vue de l'enseignement de la mécanique, il convient de donner la caractérisation d'un mouvement uniforme, d'un mouvement rectiligne, d'un mouvement à accélération centrale. En mathématiques, aucune connaissance spécifique sur ces points n'est exigible des étudiants.

Trajectoire d'un mouvement, orientation ; point régulier, birégulier.

b) Étude locale d'une courbe paramétrée

Définition des demi-tangentes en un point A (le vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{AM}$ admet une limite), de la tangente en un point A. Existence d'une tangente en un point régulier ; vecteur unitaire $\overrightarrow{T}$ de la tangente à un arc orienté.
Cas d'un point où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

Position locale de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes en un point birégulier (concavité).

Les démonstrations sont hors programme.
En ce qui concerne les points d'inflexion et de rebroussements, il convient de se limiter à quelques exemples simples.

Branches infinies : directions asymptotiques, asymptotes.

Cette étude porte seulement sur des exemples ; aucun énoncé général n'est exigible des étudiants.

6- Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

Fonctions exponentielles réelles, fonctions logarithmes. Fonctions puissances.
Fonctions hyperboliques ch, sh et th.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques de ces fonctions.

En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule connaissance exigible des étudiants est la relation $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ et son interprétation géométrique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

b) Fonctions circulaires

Fonctions circulaires cos, sin et tan.
Définition et dérivation des fonctions circulaires réciproques Arccos, Arcsin et Arctan.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions circulaires et des fonctions circulaires réciproques. Aucune autre connaissance spécifique sur les fonctions circulaires réciproques n'est exigible des étudiants.

c) Fonction exponentielle complexe

Dérivation de $t \mapsto e^{at}$ où $a \in \mathbf{C}$.

d) Primitives des fonctions usuelles

Primitives de $t \mapsto (t-a)^n$, $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Lorsque $n = -1$, on se ramène à l'intégration de la partie réelle et de la partie imaginaire ; la notion de fonction logarithme complexe est hors programme.

Primitives de $t \mapsto e^{\alpha t} P(t)$ où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$.
Tableau des primitives des fonctions usuelles.

e) Développements limités des fonctions usuelles

Développement limité à l'origine des fonctions $t \mapsto e^{at}$, $a \in \mathbf{C}$, $t \mapsto (1+t)^a$, $a \in \mathbf{R}$.

Les étudiants doivent savoir en déduire les autres développements limités usuels.

7- Équations différentielles

Ce chapitre figure au programme de la seconde période.

L'objectif, très modeste, est d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre et les équations linéaires du second ordre à coefficients constants.
Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée (échelon unité, créneau, exponentielle réelle ou circulaire) et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscilllation, amortissement, fréquences propres, résonance. Dans le cadre de tels problèmes, on peut être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux) mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Solutions d'une équation différentielle

Définition d'une solution sur un intervalle d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$, d'une solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Interprétation graphique.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est hors programme.

b) Équations linéaires du premier ordre

Caractérisation de la fonction $t \mapsto e^{at}$ ($a \in \mathbf{C}$) par l'équation différentielle $y' = a\,y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

Équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, où a, b, c sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. Équation sans second membre associée. Description de l'ensemble des solutions.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée sur un intervalle où a ne s'annule pas. Structure de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée. Expression des solutions sous forme intégrale.

c) Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation $ay'' + by' + cy = f(x)$, où a, b, c sont des nombres complexes, $a \neq 0$, et f une somme de fonctions de type $x \mapsto e^{\alpha x} P(x)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Structure de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions : variations, recherche des zéros et du signe d'une fonction, obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extremums.

§ Exemples d'algorithmes d'approximation d'une solution d'une équation numérique.

Les étudiants doivent connaître les méthodes de dichotomie et d'itération.

§ Exemples de calcul de primitives et d'intégrales.

Les étudiants doivent savoir calculer une primitive d'une fonction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles. En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.

§ Algorithme de calcul approché d'intégrales par la méthode des trapèzes.

La méthode des trapèzes est la seule qui figure au programme.
Il convient de souligner l'intérêt des subdivisions dichotomiques.

§ Exemples d'étude locale et de construction de courbes paramétrées, et d'emploi de paramétrages d'ensembles du plan définis par des conditions géométriques ou mécaniques.

Exemples d'étude d'équations différentielles : équations linéaires du premier ordre, équations linéaires du second ordre à coefficients constants, équations à variables séparables.

Il convient d'exploiter notamment des problèmes issus de la géométrie et des autres disciplines scientifiques.

III. NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

Cette partie figure au programme de la seconde période.

Elle constitue une première prise de contact, largement intuitive, avec les fonctions de plusieurs variables ; toute technicité est à éviter aussi bien pour la présentation du cours qu'au niveau des exercices et problèmes. De plus, la plupart des contenus de cette partie font seulement l'objet de travaux pratiques.

L'objectif, très modeste, est double :
- Étudier quelques notions de base sur les fonctions de deux variables réelles (continuité et dérivation).
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes, issus notamment des autres disciplines scientifiques.

En vue de l'enseignement de ces disciplines, il convient d'étendre très brièvement ces notions aux fonctions de trois variables réelles. Mais, en mathématiques, les seules connaissances exigibles des étudiants ne portent que sur les fonctions de deux variables.
Les suites d'éléments de $\mathbf{R}^2$ *et les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$ *ont déjà été étudiées en se ramenant aux suites et fonctions à valeurs réelles par passage aux coordonnées (cf. chapitres I.4 et II.4).*

1- Espace $\mathbf{R}^2$, fonctions continues

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie A *de* $\mathbf{R}^2$*. Pour la pratique, on se limite aux cas où* A *est définie par des conditions simples.*

Pour définir la notion de limite, on procède comme pour les fonctions d'une variable réelle.

a) Espace $\mathbf{R}^2$

Norme $\|x\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$. Équivalence de cette norme avec la norme euclidienne $\|x\|_2$. Définition des parties bornées de $\mathbf{R}^2$.

L'étude générale des normes sur $\mathbf{R}^2$ est hors programme.

Définition des parties ouvertes de $\mathbf{R}^2$.

Les opérations sur les ouverts, ainsi que les notions de partie fermée, de voisinage, d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme.

b) Fonctions continues de deux variables

Fonctions définies sur A et à valeurs réelles.

Limite et continuité en un point a d'une fonction définie sur un ouvert U et à valeurs réelles.

Fonctions continues sur U et à valeurs réelles ; opérations algébriques sur les fonctions continues.

Extension des notions de limite et de continuité à une application de U dans $\mathbf{R}^2$; caractérisation à l'aide des coordonnées.
Continuité d'une application composée.

2- Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles : calcul différentiel

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.

L'objectif essentiel est d'introduire quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, développement limité à l'ordre 1, gradient et de les appliquer aux extremums locaux et aux coordonnées polaires ; en revanche, les notions de fonction différentiable et de différentielle en un point sont hors programme.
En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'étendre brièvement ces notions au cas où f est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et de définir les coordonnées cylindriques mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ces points n'est exigible des étudiants.

a) Dérivées partielles premières

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h, notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Définition des dérivées partielles, notées $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U ; on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée au point a de U selon le vecteur h, et l'on pose $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi'_h(0)$.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (pour tout vecteur h, $x \mapsto \mathrm{D}_h(f)(x)$ est continue sur U).

Théorème fondamental : si les dérivées partielles sont continues sur U, alors f admet, en tout point a de U, un développement limité à l'ordre un, ainsi qu'une dérivée selon tout vecteur h, et

$$\mathrm{D}_h f(a) = h_1 \mathrm{D}_1 f(a) + h_2 \mathrm{D}_2 f(a).$$

En particulier, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Le gradient de f est défini, dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, par la relation

$$\mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a) | h).$$

La démonstration de ce résultat est hors programme.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner la notation différentielle $\mathrm{d}f$, mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U.

Application au calcul des dérivées partielles d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans U.

En un point de U où une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U présente un extremum local, ses dérivées partielles sont nulles.

b) Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

La démonstration du théorème de Schwarz, ainsi que tout énoncé concernant les formules de Taylor ou les conditions suffisantes d'existence d'extremums, sont hors programme.

c) Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ, par :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\ \vec{e_1} + \sin\theta\ \vec{e_2},$$

$$\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\ \vec{e_1} + \cos\theta\ \vec{e_2}$$

où $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Coordonnées polaires d'un point de $\mathbf{R}^2$.

Relations

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}\,\theta} = \vec{v}, \quad \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,\theta} = -\vec{u}.$$

Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles f de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles de la fonction

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

3- Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles : calcul intégral

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions intuitives sur les intégrales doubles et triples :
- Intégrales doubles sur une partie bornée définie par des conditions simples.
- Linéarité, croissance, additivité par rapport au domaine d'intégration.
- Exemples de calcul d'intégrales doubles par intégrations successives.
- Exemples simples de changements de variables : changement de variables affine, passage en coordonnées polaires.
- Brève extension aux intégrales triples.
- Exemples simples d'applications aux calculs d'aires planes, de volumes, de masses, de centres et de moments d'inertie.

En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples de calcul et d'emploi de dérivées partielles.

Exemples de recherche d'extremums.

IV. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Cette partie figure au programme de la seconde période.

Les fonctions considérées dans cette partie sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ (où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$) et sont à valeurs dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. En outre, pour la présentation des notions du cours, on suppose que les arcs paramétrés Γ ainsi définis sont réguliers à l'ordre 1, c'est-à-dire que tous leurs points sont réguliers.

1- Courbes du plan

L'objectif est double :
- Étudier différents modes de définition des courbes planes (représentations cartésienne, paramétrique et polaire).
- Étudier quelques propriétés métriques fondamentales des courbes planes (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure).

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques (lignes équipotentielles et lignes de champ), il convient de donner quelques notions sur les courbes définies par une équation implicite $F(x, y) = \lambda$ (tangente et normale en un point régulier). En mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Modes de définition d'une courbe plane

Courbe Γ définie par une représentation cartésienne

$$x \mapsto y = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad y \mapsto x = \psi(y)$$

où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Courbe définie par une représentation paramétrique

$$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t).$$

Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire.

Courbe définie par une équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ où ρ est de classe $\mathcal{C}^k$ et à valeurs réelles. Expression dans le repère polaire de vecteurs directeurs de la tangente et de la normale.

Les seules connaissances spécifiques exigibles des étudiants concernant l'étude de courbes définies par une équation polaire sont celles indiquées ci-contre.

Équation polaire d'un cercle passant par O, d'une conique de foyer O.

b) Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

Pour un arc orienté Γ régulier à l'ordre 1, repère de Frenet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$, abscisse curviligne. Longueur d'un arc.

Par définition, une abscisse curviligne est une fonction s de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que

$$s'(t) = \|f'(t)\|_2.$$

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne ; toute définition géométrique d'une telle longueur est hors programme.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, où $2 \leqslant k < +\infty$, existence d'une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I telle que, pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\,\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{e_2}$.

La démonstration de ce résultat est hors programme.
Relations

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha.$$

Définition de la courbure $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\cdot$

Relations

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}.$$

Rayon de courbure.

Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet.

Aucune connaissance spécifique sur le centre de courbure, le cercle osculateur, les développées et les développantes n'est exigible des étudiants.

2- Champs de vecteurs du plan et de l'espace

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques brèves notions sur les champs de vecteurs du plan et de l'espace :
- Dérivées partielles, divergence, rotationnel.
- Circulation, intégrale curviligne.
- Potentiel scalaire, caractérisation des champs admettant un potentiel scalaire.
- Formule de Green-Riemann dans le plan.

En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ Exemples d'emploi de représentations cartésiennes et paramétriques (en particulier polaires) pour l'étude locale et globale des courbes planes. Exemples de tracés de courbes planes.

Exemples d'étude de propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure...).

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, d'algèbre et de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne.

La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur. Le programme combine, de façon indissociable, la mise en place des concepts de l'algèbre linéaire avec l'étude des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations, étude des isométries...).

Pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels ; toute étude générale de ces structures est hors programme.

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (division euclidienne dans **Z***, opérations élémentaires sur les matrices en algèbre linéaire...) et de calcul formel (polynômes et fractions rationnelles...) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.*

I. NOMBRES ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

1- Ensembles, applications

Ce chapitre figure au programme de la première période.

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire usuel sur les ensembles, les applications et les relations. Toute étude systématique, a fortiori toute axiomatique, de la théorie des ensembles est exclue.
Le programe se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.

a) Ensembles, opérations sur les parties

Ensembles, appartenance, inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.	Les éléments x d'un ensemble E satisfaisant à une relation $\mathcal{R}(x)$ constituent une partie de E, ce qui permet d'interpréter en termes ensemblistes l'implication, la conjonction et la disjonction de deux relations, ainsi que la négation d'une relation.

b) Applications, lois de composition

Une application f de E dans (vers) F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et son graphe G. Ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F. Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongements d'une application. Équations, applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection.	Notations $E \xrightarrow{f} F$, $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$, la première étant très commode, notamment pour la composition des applications. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. La notion de correspondance entre deux ensembles est hors programme.
Définition des images directe et réciproque d'une partie.	Aucune connaissance spécifique sur les images directes et les images réciproques n'est exigible des étudiants.
Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments inversibles pour une loi associative admettant un élément neutre.	Notations additive et multiplicative d'une loi de composition.

2- Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

Ce chapitre figure au programme de la première période.

En ce qui concerne les nombres entiers naturels et les ensembles finis, l'objectif principal est d'entraîner les étudiants à pratique le raisonnement par récurrence. Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbf{N}$ *sont supposées connues ; toute construction et toute axiomatique de* $\mathbf{N}$ *sont hors programme.*

L'équipotence des ensembles infinis et la notion d'ensemble dénombrable sont hors programme.

En ce qui concerne la combinatoire, l'objectif est de consolider les acquis de la classe de Terminale S ; le programme se limite strictement aux exemples fondamentaux indiqués ci-dessous.

La démonstration des résultats de ce chapitre n'est pas exigible des étudiants.

a) Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.

Les étudiants doivent savoir pratiquer le raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs.

Suites d'éléments d'un ensemble E (indexées par une partie de $\mathbf{N}$). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.

On admet qu'étant donnés une application f de E dans E et un élément a de E, il existe une suite (u_n) et une seule d'éléments de E satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et à la condition initiale $u_0 = a$.

Exemples d'utilisation des notations $a_1 + a_2 + \ldots + a_p + \ldots + a_n$, $a_1 a_2 \ldots a_p \ldots a_n$, $\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} a_p$, $\prod_{1 \leqslant p \leqslant n} a_p$.
Suites arithmétiques, suites géométriques. Notations na et a^n.

Symbole $n!$ (on convient que $0! = 1$).

b) Ensembles finis

Définition : il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E ; cardinal (ou nombres d'éléments) d'un ensemble fini, notation $\operatorname{Card} E$. On convient que l'ensemble vide est fini et que $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

S'il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$, alors $p = n$.

Toute partie E' d'un ensemble fini E est finie et

$$\operatorname{Card} E' \leqslant \operatorname{Card} E,$$

avec égalité si et seulement si $E' = E$.
Étant donnés deux ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, f est bijective si et seulement si f est surjective ou injective.

Les étudiants doivent connaître des exemples de parties strictes de $\mathbf{N}$ en bijection avec $\mathbf{N}$.
Une partie non vide P de $\mathbf{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée. Si P est finie non vide, il existe une bijection strictement croissante et une seule de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ sur P, où $n = \operatorname{Card} P$.

c) Opérations sur les ensembles finis, dénombrements

Si E et F sont des ensembles finis, $E \cup F$ l'est aussi ; cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes.
Si E et F sont des ensembles finis, $E \times F$ l'est aussi et

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \cdot \operatorname{Card} F.$$

Les étudiants doivent connaître la relation $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

L'ensemble des applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est fini de cardinal n^p.
Cardinal A_n^p de l'ensemble des injections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$; arrangements. Cas des bijections ; permutations.

L'objectif est de vérifier les acquis des élèves dans les classes antérieures. Tout développement sur ces notions est exclu.

Cardinal $\binom{n}{p}$, ou C_n^p, de l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ayant p éléments ; combinaisons. Relations
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

Les étudiants doivent connaître les relations
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n,$$
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1} \text{ (triangle de Pascal)}$$
ainsi que leur interprétation ensembliste.

3- Structures algébriques usuelles

Ce chapitre figure au programme de la première période, sauf mention expresse du contraire.

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les structures algébriques usuelles suivantes : groupes, anneaux et corps, espaces vectoriels, algèbres. Toute étude des structures algébriques générales est hors programme.
Le programme se limite strictement aux notions de base indiquées ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.
Vu l'importance capitale de l'algèbre linéaire, le programme comporte l'étude des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire et d'algèbre ; cette étude fait l'objet d'un approfondissement dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (cf. parties II et III).
En revanche, pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions élémentaires et aux exemples usuels.

En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$*, où* $\mathbf{K}$ *désigne* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*.*

a) Groupes

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, d'un isomorphisme.

★ Noyau et image d'un morphisme de groupes ★.

Groupe additif $\mathbf{Z}$ des nombres entiers.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus :
- en première période, des ensembles de nombres, notamment $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$;
- en seconde période, de l'algèbre linéaire et de la géométrie.

b) Anneaux et corps

Définition d'un anneau (ayant un élément unité). Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire $\sum$.
Définition d'un corps (commutatif).

Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus :
- des ensembles de nombres $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$;
- des polynômes et fractions rationnelles.

★ Définition d'un sous-anneau, d'un sous-corps ★.

Anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers, corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels.

La construction de $\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Q}$ est hors programme.

Calculs dans un anneau commutatif et dans un corps. Formule du binôme. Relation
$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

c) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, définition d'un sous-espace vectoriel, d'une application linéaire, d'une forme linéaire. Composée de deux applications linéaires. Définition d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme.
L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
Espace vectoriel produit $E \times F$. Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F ; linéarité des applications $v \mapsto v \circ u$ et $u \mapsto v \circ u$.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, et notamment :
- l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$;
- l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ des applications d'un ensemble X dans $\mathbf{K}$;
- les espaces vectoriels de suites et de fonctions ;
- l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ à n lignes et p colonnes (en seconde période).

Équations linéaires ; noyau et image d'une application linéaire. Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Définition des relations linéaires entre p vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'un espace vectoriel.

On traite d'abord le cas d'une famille $(x_1, \dots, x_p)$, puis on étend brièvement ces notions au cas des familles finies $(x_i)_{i \in I}$. Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme.

Description du sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels.

★ Sous-espaces supplémentaires, notation $E = F \oplus G$. Projecteurs associés ★.

La notion générale de somme directe est hors programme.

d) Algèbres

Définition d'une $\mathbf{K}$-algèbre associative unitaire ; une telle algèbre est munie d'une structure d'anneau.

★ Définition d'une sous-algèbre, d'un morphisme d'algèbres, d'un isomorphisme ★.

Algèbre $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ des applications d'un ensemble X dans le corps $\mathbf{K}$.
Algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E ; homothéties, caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples, et notamment :
- la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{C}$ des nombres complexes ;
- l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$;
- les algèbres de suites et de fonctions ;
- l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ à n lignes et n colonnes (en seconde période).

L'étude générale des algèbres est hors programme.

4- Polynômes et fractions rationnelles

Ce chapitre figure au programme de la première période.

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractions rationnelles, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

On pourra confondre les notions de polynôme et de fonction polynomiale.

a) Algèbre $\mathbf{K}[X]$ et corps $\mathbf{K}(X)$

Algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$.
Degré d'un polynôme non nul, coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à p constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles.

Notation $a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$.

La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ n'est pas exigible des étudiants.

Aucune connaissance sur la construction de $\mathbf{K}[X]$ et de $\mathbf{K}(X)$ n'est exigible des étudiants.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$, algorithme de la division euclidienne.

Ces notions sont à mettre en parallèle avec les notions correspondantes des entiers, qui sont définies et étudiées à cette occasion.

b) Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Équations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité.

Reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X-a$; caractérisation des zéros de P.

Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{R}$.
Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ de X^n-1.

Ces notions sont à mettre en parallèle avec la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers, qui est définie et étudiée à cette occasion.

Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme à coefficients complexes.

Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'un polynôme n'est exigible des étudiants.

Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

Les étudiants doivent connaître les relations

$$P(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(X-a)^n}{n!}P^{(n)}(a),$$

$$P(a+X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X^n}{n!}P^{(n)}(a).$$

c) Étude locale d'une fraction rationnelle

Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; existence et unicité de la partie polaire de R relative à un pôle a. Lorsque a est un pôle simple de R, expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la partie polaire est hors programme.
Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle double. En revanche, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies pour des pôles d'ordre supérieur ou égal à 3. La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

Lorsque $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, toute fraction rationnelle R est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de R en éléments simples.

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples simples d'étude de problèmes de sommation.

Exemples de recherche de polynômes satisfaisant à des conditions données (interpolation, équations différentielles...).

Aucune connaissance spécifique sur les méthodes d'interpolation n'est exigible des étudiants.

§ Exemples d'obtention de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

§ Exemples d'étude d'équations algébriques à coefficients réels ou complexes.

En dehors du cas de $z^n=a$, aucune connaissance spécifique sur les équations d'ordre supérieur ou égal à 3 n'est exigible des étudiants.

§ Pratique de la décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ d'une fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles.

En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies. L'obtention de décompositions en éléments simples n'est pas un objectif en soi ; tout excès de technicité sur ce point est à éviter.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

Cette partie figure au programme de la seconde période.

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie affine du plan et de l'espace (sous-espaces affines, barycentres, applications et transformations affines).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

Dans toute cette partie, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et le corps de base est $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1- Espaces vectoriels de dimension finie

L'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires est à mener de front avec celle du calcul matriciel. La théorie de la dualité, et notamment la notion d'orthogonalité, est hors programme.

a) Familles libres, familles génératrices, bases

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbf{K}^n$.
Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_j) = f_j$.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E détermine une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrices, des familles libres.

b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases.

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle.
Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Étant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- si S est libre, alors $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base ;
- si S est génératrice, alors $p \geqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_j)$ et un espace vectoriel F muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.

Étant donnée une forme linéaire φ sur E, expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$. Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$.

d) Rang d'une application linéaire

★ Étant donnée une application linéaire u de E dans F, u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ sur $\mathrm{Im}\, u$ ★ ; en particulier,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u.$$

Dans le cadre de l'horaire de 9 heures, seule figure au programme la relation entre les dimensions du noyau et de l'image, dont la démonstration n'est pas exigible des étudiants.

Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes.

Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Caractérisation des éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$; homothéties de rapport non nul, affinités, symétries. Caractérisation des symétries par la relation $s^2 = I_E$.

L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

2- Calcul matriciel

Le calcul matriciel présente deux aspects qu'il convient de mettre en valeur :
- Calcul sur des tableaux de nombres, interprétés en termes d'applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ munis de leurs bases canoniques.
- Expression dans des bases d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre.
Un des objectifs importants est d'interpréter matriciellement un changement de base dans un espace vectoriel, puis d'étudier l'effet d'un changement de base(s) sur la matrice associée à un endomorphisme (à une application linéaire). En revanche, les notions de matrices semblables et de matrices équivalentes sont hors programme.

a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{K}$. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définition du produit matriciel, bilinéarité.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$.
Écriture matricielle $Y = M\,X$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées à n lignes.

Matrices diagonales, triangulaires supérieures (ou inférieures).

Isomorphisme canonique de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ sur l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Dans le cadre de l'horaire de 9 heures, ce résultat est exprimé en disant que cette application est linéaire bijective et conserve le produit.

Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces supplémentaires.

b) Matrices et applications linéaires

Matrice $M_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base B dans un espace vectoriel F muni d'une base C.

La j-ième colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base C de l'image par u du j-ième vecteur de la base B.

L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Matrice $M_B(u)$ associée à un endomorphisme u d'un espace vectoriel E muni d'une base B.

L'application $u \mapsto M_B(u)$ est un isomorphisme d'algèbres.

Dans le cadre de l'horaire de 9 heures, ce résultat est exprimé en disant que cette application est linéaire et conserve le produit.

Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs.

Matrice de passage d'une base B à une base B' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

La matrice de passage de la base B à la base B' est, par définition, la matrice de la famille B' dans la base B : sa j-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base B du j-ième vecteur de la base B'. Cette matrice est aussi $M_{B',B}(I_E)$.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes :
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$).

d) Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).

Pour toute application linéaire u de E dans F, le rang de u est égal au rang de $M_{B,C}(u)$, où B est une base de E et C une base de F.

★ Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme UJ_rV où U et V sont des matrices carrées inversibles ★.

La matrice J_r est l'élément $(\alpha_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ défini par les relations :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Invariance du rang par transposition.

Dans le cadre de l'horaire de 9 heures, la démonstration de cette invariance est hors programme.

e) Systèmes d'équations linéaires

Définition, système homogène associé ; interprétations. Description de l'ensemble des solutions.
Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues, à l'aide des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, et d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ (ainsi que la traduction matricielle correspondante).

Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires.

Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

f) Déterminants d'ordres 2 et 3

Déterminant de deux vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2, de trois vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Caractérisation des bases.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer à deux ou trois inconnues.

Dans le plan, lignes de niveau de

$$M \mapsto \mathrm{Det}_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}),$$

équation d'une droite du plan. Extension à l'espace.

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, application à l'orientation du plan, de l'espace ; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes du plan ou de l'espace orienté.

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices.

3- Géométrie affine du plan et de l'espace

L'objectif essentiel est d'exploiter les outils de l'algèbre linéaire pour approfondir l'étude, illustrée de nombreuses figures, des propriétés affines du plan et de l'espace, déjà abordée dans les classes antérieures. En revanche, l'étude des espaces affines généraux est hors programme; le programme se place dans le cadre des sous-espaces affines des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ *de dimension inférieure ou égale à 3 et des applications affines d'un tel espace vectoriel dans un autre. Afin de relier ce point de vue à celui adopté dans les classes antérieures, il convient de signaler que le choix d'une origine du plan ou de l'espace permet d'identifier points et vecteurs. Dans tout le programme, on effectue cette identification.*

a) Translations, sous-espaces affines

Translations d'un espace vectoriel E de dimension inférieure ou égale à 3 ; notation $A + x$ où A est un point de E et x un vecteur de E.

Les éléments de E sont appelés indifférement vecteurs ou points.

Définition des droites et des plans comme sous-espaces affines ; direction, parallélisme, intersection. Vecteurs directeurs.

Les étudiants doivent maîtriser les relations d'incidence entre droites du plan, et entre droites et plans de l'espace.

b) Applications affines, transformations affines

Définition d'une application affine, application linéaire associée ; translations, homothéties, projections.
Image d'une droite, d'un plan par une application affine.
Définition d'un isomorphisme affine, d'un automorphisme affine (ou transformation affine) ; translations, homothéties de rapport non nul, affinités, symétries.

Les étudiants doivent savoir qu'une application affine conserve l'alignement et le parallélisme. En revanche, l'étude générale des applications affines et le groupe affine sont hors programme.

c) Repères cartésiens

Repères cartésiens d'un sous-espace affine W, repère cartésien canonique de $\mathbf{R}^2$, de $\mathbf{R}^3$; coordonnées d'un point, expression d'une application affine.
Changement d'origine, changement de repère.

Un repère cartésien de W est un couple formé d'un point de W et d'une base de la direction de W.

Équations cartésiennes d'une droite du plan, d'un plan de l'espace. Définition d'une droite de l'espace par deux équations.

Définition d'un paramétrage d'une droite, d'un plan.

La donnée d'un repère cartésien détermine un paramétrage.

d) Barycentres

Définition des barycentres, associativité. Stabilité d'une droite ou d'un plan par barycentration.
Définition d'un segment. Paramétrage d'un segment.

La caractérisation des droites et des plans à l'aide des barycentres, les notions de coordonnées barycentriques, de repère affine et de partie convexe sont hors programme.

Image d'un barycentre par une application affine.

La caractérisation des applications affines à l'aide des barycentres est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs.
Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires et de changements de base, notamment pour l'étude des équations linéaires.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions (calcul de la puissance n-ième d'une matrice, interpolation, étude de suites récurrentes linéaires, d'équations différentielles...).

Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires (résolution des systèmes de Cramer, détermination du rang, recherche d'une base de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène, existence et calcul d'une solution particulière lorsque $r = n$ ou $r = p$).

Lorsque $p \leqslant 3$, en liaison avec l'étude de l'incidence des droites du plan et des plans de l'espace, les étudiants doivent savoir expliciter l'ensemble des solutions quel que soit le rang.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, la détermination du rang d'une matrice.
§ Emploi de ces opérations pour l'inversion des matrices carrées.

III. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Cette partie figure au programme de la seconde période.

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur le produit scalaire, sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 (bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, symétries et rotations, matrices de rotation) et sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, isométries, déplacements, similitudes directes).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et symétries et rotations, points et isométries) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 et la géométrie affine euclidienne et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

La mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^2$ *est définie à* 2π *près, par l'application* $\theta \mapsto e^{i\theta}$ *de* $\mathbf{R}$ *sur* $\mathbf{U}$. *Toute définition géométrique des angles est hors programme.*

Dans toute cette partie, le corps de base est $\mathbf{R}$.

1- Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens

a) Produit scalaire

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ (noté aussi en géométrie $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$) sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.
Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} fg$ dans $\mathcal{C}([a, b])$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} fg$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$.

Relations entre produit scalaire et norme :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y),$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y),$$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$
$$4(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

(identité de polarisation).

Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de ces relations (triangle et parallélogramme).

Définition d'un espace vectoriel euclidien.

Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

b) Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.
La donnée d'une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 2 (resp. 3) détermine un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$), muni du produit scalaire canonique, sur E.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F et noté $F^\perp$ ou F°.

★ Toute forme linéaire f s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$, où a est un vecteur ★.

Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales, réflexions.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace muni d'une base orthonormale.

Dans le plan (resp. l'espace) euclidien orienté, la donnée d'une orientation d'une droite D induit une orientation de la droite (resp. du plan) $D^{\perp}$.

c) Symétries et rotations du plan

Étant donnés deux vecteurs distincts a et b de E tels que $||a|| = ||b||$, il existe une réflexion et une seule échangeant a et b.

Dans un plan euclidien orienté, déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}\,(a,b)$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation de $|\mathrm{Det}\,(a,b)|$ en termes d'aire.

Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs a et b non nuls.

Relations

$(a|b) = ||a||\,||b||\cos\theta$, $\mathrm{Det}\,(a,b) = ||a||\,||b||\sin\theta$.

Rotations d'un plan euclidien.

Étude de la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation ; matrice de rotation $R(\theta)$ associée à un nombre réel θ.

Si u est la rotation d'angle de mesure θ, alors pour tout vecteur unitaire a,

$$\cos\theta = \big(a|u(a)\big), \quad \sin\theta = \mathrm{Det}\,\big(a, u(a)\big).$$

★ Morphisme $\theta \mapsto R(\theta)$ de $\mathbf{R}$ sur le groupe des matrices de rotation ★.

d) Symétries et rotations de l'espace

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, déterminant de trois vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}\,(a,b,c)$. Produit vectoriel, notations $u \wedge v$ ou $u \times v$. Expression des coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de $|\mathrm{Det}\,(a,b,c)|$ en termes de volume.

Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3, mesure θ (où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) de l'angle de deux vecteurs a et b non nuls.

Relations

$(a|b) = ||a||\,||b||\cos\theta$, $||a \wedge b|| = ||a||\,||b||\sin\theta$.

Rotations d'un espace euclidien orineté de dimension 3.

Étude de la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Axe et mesure de l'angle d'une rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Étant donnée une rotation u d'axe dirigé par un vecteur unitaire a et d'angle de mesure θ (modulo 2π), l'image d'un vecteur x orthogonal à l'axe est donnée par

$$u(x) = (\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,a \wedge x.$$

Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et la mesure de l'angle d'une rotation, ainsi que l'image d'un vecteur quelconque et la matrice associée à cette rotation.

2- Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

a) Distances, angles

Repères orthonormaux.
Sous-espaces affines orthogonaux du plan et de l'espace ; projections orthogonales.
Distance d'un point à une droite du plan, à une droite ou un plan de l'espace.
Dans le plan euclidien orienté, mesure de l'angle orienté de deux demi-droites.
Dans l'espace euclidien de dimension 3, mesure de l'angle de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Les étudiants doivent savoir calculer les projections orthogonales, les distances, et les mesures des angles indiqués ci-contre, et savoir les exprimer dans un repère orthonormal.

Étude des lignes de niveau de $M \mapsto (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{AM})$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire.

Équations normales d'une droite dans le plan, d'un plan dans l'espace.

b) Isométries du plan et de l'espace

Définition d'une isométrie du plan (resp. de l'espace) : transformation affine conservant les distances. Définition d'un déplacement. Translations, réflexions, rotations.

Étude du produit de deux réflexions du plan (resp. de l'espace).
L'étude générale des isométries du plan (resp. de l'espace) est hors programme.

Étant donnés deux points distincts A et B du plan ou de l'espace, il existe une réflexion et une seule échangeant A et B.

Les étudiants doivent savoir calculer l'image d'un point M par cette réflexion.

Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.
Tout déplacement de l'espace est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.

c) Similitudes directes du plan

Définition d'une similitude (transformation affine multipliant les distances dans un rapport donné) ; rapport de similitude.
Définition d'une similitude directe. Homothéties de rapport non nul, translations, rotations.
Écriture complexe d'une similitude directe. Centre et mesure de l'angle d'une similitude directe distincte d'une translation.

L'étude générale des similitudes du plan est hors programme.
Les étudiants doivent connaître l'effet d'une similitude directe sur les angles orientés et les aires.

Étant donnés deux segments AB et $A'B'$ de longueur non nulle, il existe une similitude directe et une seule transformant A en A' et B en B'.

Les étudiants doivent savoir déterminer le rapport, la mesure de l'angle et le centre de cette similitude directe lorsqu'elle n'est pas une translation.

d) Cercles et sphères

Dans le plan, intersection d'un cercle et d'une droite.
Dans l'espace, intersection d'une sphère et d'un plan.
Équations cartésiennes d'un cercle, d'une sphère.

Caractérisation d'un cercle et d'une sphère par l'équation $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ où AB est un diamètre.

e) Coniques

Dans le plan, lignes de niveau de $\dfrac{MF}{MH}$; définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.

Effet d'une similitude sur une conique.
Caractérisation des ellipses et des hyperboles à l'aide des lignes de niveau de $MF + MF'$ et de $|MF - MF'|$ (définition bifocale).

Définition d'une conique par une équation cartésienne (dans un repère orthonormal) de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0.$$

Équation réduite.

En dehors du cas indiqué ci-contre et de celui des hyperboles définies par une relation $xy = \lambda$, aucune connaissance spécifique sur la réduction des coniques définies par une équation cartésienne n'est exigible des étudiants.

Image d'un cercle par une affinité orthogonale.

Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.

Travaux pratiques

§ En dimensions 2 ou 3, exemples d'emploi de bases orthonormales, de supplémentaires orthogonaux et de changements de base orthonormale.
§ En dimensions 2 et 3, exemples d'emploi du produit scalaire, du produit vectoriel et du produit mixte pour l'étude de configurations du plan et de l'espace (calcul de projections orthogonales, de distances, de mesures d'angles, d'aires, de volumes...).

§ En dimensions 2 et 3, exemples de recherche de lignes de niveau, définies notamment par des conditions portant sur des distances et des mesures d'angles.

Dans le plan, lignes de niveau de $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$, de $\sum_i \alpha_i MA_i{}^2$, de $\dfrac{MA}{MB}$ et de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.