ANNEXE I

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I. OBJECTIFS DE FORMATION DE LA FILIÈRE PT

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière PT, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Les démonstrations qui sont utiles à une bonne compréhension du cours sont au programme. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

a) Objectifs de la formation

La formation est conç ue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux-mêmes des questions, c'est-à-dire à prendre en compte une problématique mathématique.

b) Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles, ...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de faç on efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) Intentions majeures

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures :

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de faç on superficielle.

- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre. C'est dans cette perspective, et à l'opposé de tout dogmatisme, que les structures constituent un outil pour une meilleure compréhension et une meilleure précision de la pensée et fournissent des méthodes pour l'étude des problèmes mathématiques.

- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

b) Secteur de l'analyse et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement de modèles continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. En seconde année, les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suites ou de fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes associés. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.
En seconde année, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle), l'étude des fonctions de plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.
Pour ce qui concerne la représentation des fonctions par des intégrales, les transformations de Fourier et de Laplace et l'étude des intégrales eulériennes sont hors programme. Ces notions peuvent être rencontrées à l'occasion de l'étude de problèmes, en liaison avec les sciences physiques et industrielles, mais ne font l'objet d'aucune connaissance exigible en mathématiques.

c) Secteur de l'algèbre et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des groupes des anneaux et des corps en ont été écartées.
Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

En seconde année, le programme est organisé autour de la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien.

d) Secteur de la géométrie et de ses interventions

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention : apports du langage géométrique et des modes de représentation. Dans cette filière PT, tout particulièrement, la géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces) est un élément essentiel de la formation, en relation avec la physique et les sciences industrielles.

e) Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles (mécanique, électrocinétique, électronique, automatique, optique, cinétique chimique), le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets (vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, équations différentielles modélisant l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

3- Intégration de l'outil informatique

a) La démarche algorithmique

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes. Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie, qu'ils soient mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En revanche, en mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes, aucun résultat général sur leurs performances n'est exigible des étudiants.

b) Le calcul symbolique et formel

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques du logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles.

c) Emploi des calculatrices

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable, dans les situations liées au programme de mathématiques. Cette utilisation permet notamment la mise en œuvre d'une partie des algorithmes du programme, à l'occasion des travaux pratiques de mathématiques. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base :

- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

4- Conception et organisation de la formation

a) Organisation du travail de la classe

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit-il, de théories éventuellement suivies d'applications. Il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'analyser les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de faç on organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.

- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, ...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement, ...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) Organisation du travail personnel des étudiants

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :

- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et résultats essentiels, savoir analyser les démarches mises en jeu dans les démonstrations et les techniques de raisonnement, maîtriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.

- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type d'exercices est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.

- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de faç on coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés, en fonction du projet de formation des étudiants.

- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.

- En classe de seconde année, les épreuves écrites d'évaluationen temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances à mettre en œuvre dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser les exigences mentionnées par le programme.

- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse critique, grâce à une analyse comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.

- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) Évaluation et notation des étudiants

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.

La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

5- Interprétation et délimitation des programmes

a) Objectifs

Les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui de l'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets proposés pour l'évaluation des étudiants.

b) Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :

- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des thèmes de travaux pratiques, fixant d'une part le champ des questions mathématiques à étudier et d'autre part les méthodes et les techniques à connaître et à savoir mettre en œuvre. Les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe § . Les thèmes qui doivent donner lieu à une exploitation graphique sont repérés par le signe *.

c) Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre exemples, méthodes, algorithmes, ...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories :

- Celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes et des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite, dans les bandeaux ou dans les travaux pratiques.
- Celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
- Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants : il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution « exemples de ... » (dont la fonction est d'indiquer le champ des problèmes et des phénomènes mathématiques à étudier) et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution « aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants ».

En outre, pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution « la démonstration n'est pas exigible des étudiants », le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre. La locution « la démonstration est hors programme » signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat.

Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution « définition de... » ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

II. PROGRAMME DES CLASSES PT ET PT*

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, et de leurs interventions en calcul différentiel et intégral. L'essentiel est que les étudiants sachent mettre en œuvre et utiliser les techniques de base de l'analyse, déjà vues en première année (encadrement, passage à la limite, approximation).
L'accent est mis sur l'expression des fonctions comme somme d'une série entière ou d'une série de Fourier. Il convient de noter toutefois qu'aucune notion générale n'est au programme sur les suites et les séries de fonctions et leurs modes de convergence.
Même si l'étude des espaces vectoriels normés n'est pas au programme, le langage des normes doit être utilisé pour les différentes questions du programme d'analyse où il est commode (normes classiques sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$, normes sur les espaces de fonctions...). Les étudiants doivent connaître les notions suivantes : définition d'une norme sur un espace vectoriel réel ou complexe, distance associée, boules, parties bornées, convergence d'une suite ; ils doivent savoir que deux normes équivalentes définissent la même notion de convergence. En revanche, mis à part le cas de $\mathbf{R}^n$ et de $\mathbf{C}^n$ le langage des ouverts et des fermés n'est pas au programme, et la continuité n'est traitée que pour les fonctions de plusieurs variables réelles.

Les problèmes et les méthodes numériques doivent tenir une large place, non seulement en analyse, mais aussi en algèbre et en géométrie, à un double titre :
– illustration de la portée des résultats et des concepts, et, en retour, motivation pour leur étude ;
– recherche et mise en forme d'algorithmes, et comparaison expérimentale de leurs performances.
Les aspects numériques sont donc étroitement associés aux problèmes mathématiques dont ils relèvent ; en particulier les thèmes d'activités numériques et algorithmiques sont repérés par le signe § dans les rubriques de travaux pratiques.

De nombreux outils du programme concourent à l'obtention de représentations graphiques :
– les méthodes de construction géométrique dans le plan et l'emploi des instruments de dessin ;
– les méthodes numériques employant les ressources de l'algèbre de l'analyse et de la géométrie différentielle et des instruments de calcul ;
– les méthodes de représentation des configurations de l'espace par projection sur des plans de coordonnées ou à l'aide de familles de sections planes ;
*Les outils précédents sont répartis dans l'ensemble du programme. Les thèmes d'activités graphiques sont repérés par le signe * dans les rubriques de travaux pratiques.*
Aucune connaissance n'est exigible sur les techniques de la géométrie descriptive.

I. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, *ou* $\mathbf{R}^m$.

1- Normes dans $\mathbf{R}^m$

Norme et distance dans $\mathbf{R}^m$. Définitions des boules, des parties ouvertes, des parties fermées, des parties bornées.
Limite d'une suite d'éléments à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; caractérisation à l'aide des suites coordonnées. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques.

On admettra que toutes les normes sont équivalentes.
Dans la pratique, on utilisera les normes « sup » $\left(\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq m} |x_i|\right)$ et euclidienne $\left(\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1\leq i\leq m} |x_i|^2}\right)$

2- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite.
Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.

Définition des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I (k entier naturel ou $k = \infty$). Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^m)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbf{R}^m$.
Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles.

Pour $m = 2$ ou $m = 3$, et $\mathbf{R}^m$ euclidien (éventuellement orienté), dérivées successives d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel.

Les étudiants doivent connaître la formule de Leibniz, pour les fonctions du type :

$$t \mapsto \lambda(t)V(t),$$

$$t \mapsto U(t) \cdot V(t), \text{ et } t \mapsto U(t) \wedge V(t),$$

où $\lambda \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}),\ U, V \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^m)$.

b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Par extension, une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ et $T-$périodique est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux définies sur le segment $[a, b]$.

c) Formule de Taylor-Young

Développement limité d'ordre p en un point. Opérations sur les développements limités.
Existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: formule de Taylor-Young.

3- Intégrales dépendant d'un paramètre

Toutes les démonstrations des résultats de ce paragraphe sont hors programme.

a) Continuité

Continuité sous le signe $\int$: soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times [a, b]$, où A est un intervalle de $\mathbf{R}$. Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, dt$ est continue sur A.

b) Dérivation

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : lorsque f est continue sur $A \times [a, b]$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times [a, b]$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, \mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

c) Intégration

Intégration sous le signe $\int$ (formule de Fubini) : lorsque f est continue sur $A \times [a, b]$, alors pour tout segment $[c, d]$ inclus dans A

$$\int_c^d \Big[\int_a^b f(x,t)\,dt\Big]\,dx = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,t)\,dx\Big]\,dt.$$

La formule de Fubini est à relier à la notion d'intégrale double abordée en classe de première année.

4- Intégrales impropres

Pour ce qui concerne les intégrales impropres (ou généralisées), l'objectif du programme est la maîtrise de la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle non fermé ou non borné. Le programme part de la définition générale de la convergence, en raison de la simplicité de la présentation, mais l'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

a) Définition d'une intégrale convergente

Si f est une application continue sur $[a, b[$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, par définition, si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b, en restant dans $[a, b[$.

On aura soin de distinguer, dans la présentation, le cas où f est une fonction continue non bornée sur un intervalle $[a, b[$ borné, et le cas où l'intervalle est non borné (du type $[a, +\infty[$ par exemple).

Définition des intégrales divergentes.

Nature des intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\int_0^1 \ln t\,dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}_+^*$$

b) Intégrales des fonctions positives

Relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et de g, dans le cas où $f \leq g$, et dans le cas où $f \sim g$.

c) Intégrales absolument convergentes

Définition d'une intégrale absolument convergente.

Comparaison en module à des fonctions réelles positives, du type : $|f| \leq g$, ou $|f| \sim g$.

d) Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif est d'étendre les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$, déjà étudiés sur un segment, au cas d'un intervalle I quelconque dont l'origine et l'extrémité (prises dans $\overline{\mathbf{R}}$) sont notées a et b. Les démonstrations de ces théorèmes sont hors programme.

Continuité sous le signe $\int$: soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times I$, où A est un intervalle de $\mathbf{R}$ telle que, pour tout élément x de A, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ ait une intégrale absolument convergente sur I, et φ une fonction continue positive dont l'intégrale sur I est convergente. Alors si pour tout élément (x, t) de $A \times I$ $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination), la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur A.

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : soit A un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent et admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant elle aussi ces mêmes hypothèses. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de la convergence absolue d'intégrales impropres de fonctions continues.

§ Exemples de calculs de valeurs exactes ou approchées d'intégrales et d'intégrales impropres.

Exemples d'études de fonctions définies par une intégrale.

II. SÉRIES

1- Séries de nombres réels ou complexes

Comme pour les intégrales impropres, l'objectif est ici l'étude de la convergence absolue des séries à termes réels ou complexes. L'étude de la semi-convergence est limitée aux séries réelles alternées par utilisation de la règle spéciale.

a) Convergence

Séries convergentes, séries divergentes. Convergence des séries géométriques.

b) Séries à termes réels positifs

Comparaison à une intégrale impropre.
Convergence des séries de Riemann.

Comparaison des convergences de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dans le cas où $u_n \leq v_n$ et dans le cas où $u_n \sim v_n$.

Application au cas où l'une des deux séries est une série de Riemann.

La règle « $n^\alpha u_n$ » est hors programme.

Comparaison à une série géométrique ; règle de d'Alembert.

Toute autre règle de convergence, en particulier la règle dite de Cauchy (utilisant $\sqrt[n]{u_n}$) est hors programme.

c) Convergence absolue

Séries absolument convergentes.

Toute série absolument convergente est convergente.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

d) Séries alternées

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; encadrement de la somme et du reste.

On peut encadrer la somme d'une telle série par deux sommes partielles consécutives. Pour le reste de la série, son premier terme donne le signe et un majorant en valeur absolue.

e) Opérations

Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire.

La notion de série produit est hors programme.

2- Séries entières

Les séries entières considérées dans ce paragraphe sont à coefficients réels ou complexes.

a) Convergence d'une série entière

Définition des séries entières d'une variable complexe.
Étude de la convergence : rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence.

Dans le cas où le rayon de convergence est un nombre réel $R > 0$, toute étude systématique de la convergence sur le cercle $C(0, R)$ est exclue.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Intervalle de convergence.
Propriétés (admises) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence : continuité, dérivation et intégration terme à terme (avec conservation du rayon de convergence).

On admettra que si le rayon de convergence est un nombre réel $R > 0$, et si de plus la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $x = R$ (resp. pour $x = -R$), la somme est continue sur $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$).

Développement en série entière autour de 0 de $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $(1+x)^\alpha$, où α est réel.

Seuls ces exemples sont à connaître.

c) Exponentielle complexe

Expression (admise), pour z complexe, de $\exp z$ (ou e^z) comme somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Rappel : en première année, on a défini

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

3- Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont présentées dans le cadre des fonctions numériques $T-$périodiques continues par morceaux (T est un nombre réel strictement positif, et on pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$). L'interprétation géométrique des séries de Fourier sera donnée dans le cadre de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbf{R})$ des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $T-$périodiques.

a) Définitions

Coefficients de Fourier d'une fonction $T-$périodique f définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et continue par morceaux (expression en cosinus et sinus, en posant $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$), sommes partielles

$$S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)\big)$$

de la série de Fourier d'une telle fonction.

Dans certains cas, on peut simplifier les calculs en définissant pour $n \in \mathbf{N}, n > 0$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\big(a_n(f) - \mathrm{i}b_n(f)\big)$$

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}\big(a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f)\big),$$

$$\text{et } c_0(f) = a_0(f),$$

mais aucune formule relative à la forme exponentielle des coefficients de Fourier n'est exigible.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbf{R})$ des applications $T-$périodiques continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt,$$

norme associée.
Dans cet espace, les fonctions $t \mapsto \cos(n\omega t)$ pour n décrivant $\mathbf{N}$, et $t \mapsto \sin(n\omega t)$ pour n décrivant $\mathbf{N}^*$ forment une famille orthogonale.

Dans ce cadre, on donnera l'interprétation de $S_n(f)$ comme projection orthogonale de f.

b) Formule de Parseval

Théorème de Parseval (admis) : convergence et expression

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

On donnera l'interprétation géométrique du théorème de Parseval dans l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbf{R})$.

c) Convergence d'une série de Fourier

Théorème de Dirichlet (admis) : pour une fonction $T-$périodique f définie sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, lorsque n tend vers l'infini, les sommes de Fourier $S_n(f)(t)$ convergent en tout t réel, vers $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$, demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point t.

Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, lorsque n tend vers l'infini, les sommes de Fourier $S_n(f)(t)$ convergent en tout t réel, vers $f(t)$. De plus, les séries $\sum |a_n(f)|$ et $\sum |b_n(f)|$ sont convergentes.

Dans ces hypothèses, on admet que pour tous α et β réels, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f.

Travaux pratiques

Pour une série à termes réels positifs, exemples d'encadrements du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ Exemples de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

Exemples d'étude de suites par utilisation de séries.

Exemples d'étude de fonctions définies par une série entière.

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de développements en série entière pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1- Systèmes linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Étude du système $X' = AX + B(t)$, où A est une matrice de taille n et B une application continue d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$.
Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée (théorème admis).
Système homogène associé ; structure de l'ensemble des solutions (théorème admis).

On explicitera l'existence et l'unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée, ainsi que la structure de l'ensemble des solutions dans le cas d'un système homogène dont la matrice est diagonale ou triangulaire.

2- Équations linéaires d'ordre 2

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée (résultat admis).
Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas.

On considère les équations différentielles de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

les fonctions a, b, c, f étant continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, sur lequel a ne s'annule pas.

3- Équations non linéaires d'ordre 1

En dehors du cas des équations à variables séparables, tout exercice d'intégration d'une équation différentielle non linéaire devra comporter l'indication d'une méthode.

Équations différentielles à variables séparables ; cas particulier des équations incomplètes.

On illustrera la notion de courbe intégrale.

Définition d'un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(x,y) \end{cases}$$

et de ses trajectoires, dans le cas où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$.

Tout théorème d'existence et unicité des trajectoires d'un système autonome est hors programme.

Travaux pratiques

Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants de la forme $X' = AX + B(t)$, par diagonalisation ou trigonalisation de A, ou par réduction de la taille du système.

§ Algorithme de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ou d'un système autonome de deux équations d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

Exemples d'utilisation de changements de variable ou de fonction.

Exemples de transformation d'une équation différentielle du premier ordre en un système autonome de deux équations.

§ * Exemples de construction de courbes intégrales d'une équation différentielle, de trajectoires d'un système autonome de deux équations différentielles d'ordre 1. On se limitera à des exemples simples principalement issus de la physique ou des sciences industrielles.

Exemples simples d'utilisation d'une intégrale première.

Exemples d'étude de problèmes issus de la mécanique ou de la physique conduisant à une équation différentielle du premier ou du second ordre.

IV. FONCTIONS DE $\mathbf{R}^p$ DANS $\mathbf{R}^n$

Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. On se limitera aux cas où $n \leq 3$ et $p \leq 3$. On ne soulèvera aucune difficulté liée aux ensembles de définition des fonctions considérées.

1- Continuité

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe et tous les résultats sont admis.

Espace vectoriel des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Fonctions bornées.

Continuité d'une application en un point. Opérations algé briques sur les applications continues. Continuité d'une application composée.
L'image d'une partie fermée bornée par une fonction continue est fermée et bornée (résultat admis).

2- Calcul différentiel

L'objectif est d'aboutir à une bonne maîtrise de quelques problèmes usuels à partir d'un minimum d'outils théoriques. En particulier la notion d'application différentiable est hors programme et, comme en première année, les applications de classe $\mathcal{C}^1$ seront définies à partir des dérivées partielles.
Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

a) Différentielle et matrice jacobienne

Applications de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle en un point, matrice jacobienne, jacobien. Lien avec le gradient.
Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$).
Applications aux changements de variables.

On utilisera la notation différentielle :
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$
(pour deux variables par exemple)
très commode pour le calcul de la différentielle d'une fonction composée.

b) Formule de Taylor-Young

Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise) ; application à l'étude des extrémums locaux.

3- Calcul intégral

Les notions introduites dans ce paragraphe sont étudiées en vue de leur utilisation en sciences physiques ou en sciences industrielles. Tout développement théorique est exclu. Tous les résultats sont admis.

a) Intégrales doubles et triples, applications

Changement de variables dans les intégrales doubles et triples.

Intégrale sur un arc, circulation.

Aire d'un morceau de surface. Intégrale de surface, flux, angle solide.

Intégrale triple ; volumes.

Éléments d'inertie d'un solide.

b) Analyse vectorielle

Gradient, divergence, rotationnel.
Potentiel scalaire ; formule de Green-Riemann, formule de Stokes. Potentiel vecteur ; formule d'Ostrogradski.

Travaux pratiques

Exemples de calcul de dérivées partielles.

Exemples de recherche d'extrémums locaux ou globaux.

Exemples d'applications du calcul intégral à des problèmes issus de la physique ou des sciences industrielles.

Exemples d'applications de l'analyse vectorielle.

V. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Comme en première année, l'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce chapitre.

1- Courbes planes

a) Enveloppes

Enveloppe d'une famille de droites définies par une relation $a(t)x+b(t)y+c(t)=0$, où a, b et c sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, sur lequel le déterminant

$$t \mapsto \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas.

b) Développée, développantes

Développée et développantes d'une courbe paramétrée plane.

2- Courbes de l'espace

Tangente et plan normal en un point régulier, plan osculateur en un point birégulier.
Propriétés métriques : longueur d'un arc, abscisse curviligne ; repère de Frenet, courbure, torsion en un point trirégulier.

Par convention, si le repère de Frenet est noté $\left(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\right)$, la courbure γ et la torsion τ sont données par :

$$\gamma = \overrightarrow{N} \cdot \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}, \quad \tau = -\overrightarrow{N} \cdot \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}$$

Définition d'une hélice par angle constant entre la tangente unitaire orientée et un vecteur unitaire fixe.

Toute autre propriété de l'hélice est hors programme.

3- Courbes et surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes du plan et de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages et par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.
Toutes les formes utiles (pour traiter ce paragraphe) du théorème des fonctions implicites sont admises.

a) Plan tangent

En un point régulier d'une surface, plan tangent, normale.
Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

b) Intersection de deux surfaces

Projection sur un plan de coordonnées d'une courbe définie comme intersection de deux surfaces.

4- Surfaces usuelles

Description des cylindres (génératrices, sections droites), des cônes (sommet, génératrices), des surfaces de révolution (axe, méridienne, parallèles). Plans tangents aux surfaces précédentes. Description des quadriques à partir de leurs équations réduites en repère orthonormal (ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique).

Définition d'une surface réglée, plan tangent en un point régulier. Exemples de surfaces développables (même plan tangent en tous les points réguliers d'une génératrice) : cylindre, cône, surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche.

Aucune autre connaissance sur les surfaces réglées et les surfaces développables n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Emploi des coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

§ * Exemples de recherche d'enveloppes de droites dans le plan.

§ * Exemples de représentation de courbes gauches par projection sur des plans de coordonnées.

* Exemples de recherche de courbes planes ou de courbes d'une surface satisfaisant à une condition différentielle (trajectoires orthogonales, lignes de plus grande pente, contours apparents cylindriques et coniques, hélices).

Exemples de génération de surfaces, de recherche de paramétrages ou de mise en équation dans un repère adéquat (surfaces de révolution, surfaces réglées).

* Exemples d'étude de familles de sections planes d'une surface.

§ * Exemples de représentation d'une surface à l'aide de familles de courbes tracées sur la surface.

Exemples de recherche de l'intersection de deux surfaces et de la projection de cette intersection sur un plan de coordonnées. Les critères de décomposition d'une telle intersection sont en dehors du programme.

Exemples de surfaces réglées.

Exemples d'hélices.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre linéaire se propose de donner l'outil essentiel de la réduction des endomorphismes. C'est l'occasion d'utiliser les outils et les techniques construits en première année (calcul matriciel, résolution des systèmes linéaires). Les déterminants sont introduits en dimension n pour servir d'outil dans les problèmes de réduction des endomorphismes, et le calcul des déterminants n'est pas une fin en soi. On évitera particulièrement sur ce point tout excès de technicité.

I. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

Dans ce chapitre, le corps des scalaires, noté **K** *est* **R** *ou* **C**.

1- Espaces vectoriels

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension quelconque.

La notion de somme directe n'est au programme que dans le cas de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

Équation linéaire $f(x) = b$, avec f application linéaire de E vers F de dimensions quelconques.
Cas de l'équation homogène.
Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Étude du cas où $b = b_1 + b_2$.

Pour l'équation homogène, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$.
Dans le cas général, il est vide si $b \notin \operatorname{Im} f$, et de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} f = \{x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker} f\}$ si $b \in \operatorname{Im} f$.

2- Valeurs propres et vecteurs propres

Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

On convient qu'un vecteur propre est non nul.
Éléments propres d'une homothétie, d'une projection, d'une symétrie.

3- Déterminants

a) Déterminant de n vecteurs dans une base.

Définition d'une forme $n-$linéaire alternée sur un espace de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant n'est pas exigible des étudiants.

Échange de deux vecteurs.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

c) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou à une colonne. Matrices carrées semblables, définition, interprétation en terme de changement de base. Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Le groupe symétrique n'étant pas au programme, l'expression du déterminant d'une matrice en fonction de ses coefficients n'est pas non plus au programme. Le déterminant d'une matrice carrée est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Ce résultat peut être admis.

4- Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre : il est minoré par la dimension du sous-espace propre associé.

Endomorphismes diagonalisables (par définition $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u).
Caractérisation (admise) à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.
En dimension n, tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique a n racines (distinctes) est diagonalisable.

Quand l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de diagonalisation par réunion de bases de chacun des sous-espaces propres.

Trigonalisation d'un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique peut s'écrire comme produit de polynômes de degré un : il existe une base telle que la matrice associée à u dans cette base soit triangulaire supérieure (théorème admis). Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode pour trouver une telle base.

Mis à part les cas élémentaires (endomorphisme d'un espace de dimension 3 ayant deux valeurs propres distinctes par exemple), tout exercice de trigonalisation doit comporter une indication.

5- Réduction des matrices carrées

Valeurs propres d'une matrice carrée, polynôme caractéristique, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Diagonalisation et trigonalisation des matrices carrées : toute matrice carrée dont le polynôme caractéristique peut s'écrire comme produit de polynômes de degré un est semblable à une matrice triangulaire supérieure (admis).

Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode générale de trigonalisation.

Travaux pratiques

Exemples de résolutions d'équations linéaires en dimension finie ou non.

Exemples de recherche des éléments propres d'un endomorphisme en dimension quelconque, en particulier dans des espaces vectoriels de fonctions.

Exemples de diagonalisation de matrices carrées, exemples simples de réduction à une forme triangulaire.

§ Exemples d'études du comportement des puissances n-ièmes d'une matrice.

Exemples d'études de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants de la forme $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$.

II. ESPACES VECTORIELS PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Dans ce chapitre, le corps des scalaires est $\mathbf{R}$.

1- Espaces préhilbertiens réels.

Les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe ne sont pas nécessairement de dimension finie. On se bornera aux points élémentaires qui suivent, en liaison avec le programme d'analyse.

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme. Théorème de Pythagore.	
Définition d'une famille orthonormale. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.	Lorsque l'espace est de dimension finie, existence de bases orthonormales ; méthode de Schmidt.

2- Espaces euclidiens (c'est-à-dire préhilbertiens réels de dimension finie)

a) Groupe orthogonal

Définitions d'un automorphisme orthogonal, du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Matrices orthogonales, groupe $\mathcal{O}(n)$.	En liaison avec le programme de première année, on décrira le groupe orthogonal en dimensions 2 et 3 (et seulement dans ces cas).

b) Endomorphismes symétriques

Définition d'un endomorphisme symétrique ; matrice associée dans une base orthonormale.	
Théorème admis de réduction d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.	Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

c) Formes quadratiques

Définitions d'une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$, d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ et de la forme polaire associée.	Sont hors programme toute notion générale sur les formes bilinéaires, et les notions de rang et de signature d'une forme quadratique.
Matrice d'une forme bilinéaire symétrique (resp. d'une forme quadratique) dans une base orthonormale.	On reliera l'étude des formes quadratiques à celle de la matrice de l'opérateur d'inertie d'un solide, qui figure au programme de mécanique.
Réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale.	La réduction d'une forme quadratique dans une base non orthonormale est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples de diagonalisation d'une matrice symétrique dans une base orthonormale.

Recherche de l'équation réduite et des axes d'une conique ou d'une quadrique dont un centre de symétrie est donné.

Exemples de calcul de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie et de la distance à un tel sous-espace.