XIII – Algèbre linéaire

XIII.1 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & d \\ e & f & -1 \end{pmatrix}$$

Soit aussi : $u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer (a, b, c, d, e, f) pour que la matrice de f dans cette base soit diagonale.

XIII.2 Soit A et B des matrices 3×3. On définit $[A, B] = AB - BA$. Montrer que :

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

XIII.3 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} a_{ii} = 2 & \forall i \\ a_{ij} = 1 & \forall i \neq j \end{cases}$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

XIII.4 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère P le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite vectorielle engendrée par $u = (1, 2, 3)$. Déterminer l'ensemble des toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ laissant globalement invariants P et D.

XIII.5 Soit E un espace vectoriel de dimension n (on traitera cet exercice avec $n = 6$), $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tel que $(f^i(x))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ base de E.

1. Donner la forme de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est $\mathrm{Vect}(f^i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$.

Quelques fonctions Maple utiles.

- Pour construire une matrice de passage, on place en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base. La fonction permettant de faire cela est `concat`.
- Lorsque l'on veut appliquer une fonction à tous les coefficients d'une matrice, on utilise `map` [de l'anglais *applique*]. On y pensera en particulier pour simplifier les coefficients d'une matrice (`map(simplify,M)`), pour calculer la puissance n d'une matrice diagonale, et UNIQUEMET DES MATRICES DIAGONALES (`map(t->t^n,D)`), forcer une évaluation qui ne marche pas autrement (`map(eval,M)`).
- Penser à utiliser `seq(blahblah,i=1..n)` pour construire une séquence. Si en particulier on doit obtenir l'ensemble de tous les coefficients d'une matrice (par exemple pour dire qu'ils sont nuls et écire le système correspondant), un moyen élégant est d'écrire :

  `{seq(seq(M[i,j],j=1..n),i=1..n)}`
- Enfin, il n'est pas question de faire un exercice d'algèbre linéaire avec Maple sans avoir une parfaite connaissance de la formule de changement de base et de la matrice de passage.