VIII – Suites

VIII.1 On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

Ces deux suites sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune ℓ.

1. Écrire une procédure permettant de calculer u_n et v_n pour n donné. Le résultat sera donnée sous forme de liste.
2. Écrire une procédure, permettant d'estimer la vitesse de convergence, fournissant une valeur approchée de la limite evec une précision donnée, ainsi que le rang minimal auquel cette précision est atteinte.
3. On définit $J = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$. Donner une valeur approchée de $\ell \times J$. Quelle conjecture peut-on formuler ?

VIII.2 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On note $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{2}(1+x^2)$.

1. On souhaite donner une approche graphique de cette suite (11 termes).
   (a) Construire sur un même graphe la courbe représentative de f et la première bissectrice.
   (b) Utiliser `@@` pour définir la fonction $u\ :\ n \mapsto u_n$ en fonction de la fonction $f\ :\ x \mapsto f(x)$.
   Déterminer les coordonnées des points de la ligne brisée permettant de représenter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et les ranger dans une séquence.
   (c) Faire apparaître sur un même graphe les représentations de f, la première bissectrice et cette ligne brisée.
2. On veut maintenant faire l'étude précise de la convergence.
   (a) Quelles sont les limites éventuelles ?
   (b) En étudiant le signe de $f(x) - x$, étudier la monotonie de la suite.
   (c) Conclure.

VIII.3

1. Écrire une procédure `visu` permettant d'effectuer l'étude graphique d'une suite définie par :
   $$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   où f, u_0 et n sont quelconques (même si n doit rester raisonnable...).
   On pourra trouver cette procédure sur le site `http://ptsi2.free.fr`.
2. Appliquer cette procédure à la fonction f précédente, avec différentes valeurs de u_0.
3. Faire de même avec $x \mapsto 1 - x^2$.
4. Faire de même avec $x \mapsto \cos x$.
5. Faire encore de même avec $x \mapsto \frac{3x-2}{1-x}$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$ puis $u_0 = \frac{3}{4}$.
6. Un problème se pose donc avec cette dernière suite. Déterminer les 10 premières valeurs de u_0 pour lesquelles cette dernière suite n'est pas définie.

VIII.4 Soient les suites définies par :

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes ;
2. Tracer sur un graphique les deux suites pour n variant de 1 à 100 ;
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$